

Российская Академия Наук
Институт философии

М.М.Новосёлов

ЛОГИКА АБСТРАКЦИЙ
(методологический анализ)

Часть первая

Москва

2000

ББК 87.4
УДК 162.6
Н 76

В авторской редакции

Рецензенты:

доктор филос. наук *А.М.Анисов*

доктор филос. наук *И.А.Герасимова*

кандидат физ.-мат. наук *З.А.Кузичева*

Н 76

Новосёлов М.М. Логика абстракций (методол. анализ). Ч.1. — М., 2000. — 191 с.

Обсуждается философская тема абстракции с целью совершенствования той части логики научного познания, в которой проблемы абстрактных моделей являются важнейшей теоретической составляющей. Применяется разработанный автором интервальный метод анализа с привлечением обширного исторического и методологического материала. Теоретическим результатом работы является формирование основ теории абстракций, соответствующих современному состоянию научного знания. Вводится класс новых философских понятий и абстракций и формируются основы нового направления философских исследований — «логика абстракций».

ISBN 5-201-02044-5

© М.М.Новосёлов, 2000

© ИФРАН, 2000

Предисловие

Актуальность темы «абстракция» определяется её историей. Более двух тысячелетий эта тема не сходит с повестки для любой теории познания, а её обсуждение и подходы к её решению определяют лицо самой теории познания. Для философии тема абстракции — это тот нелёгкий путь, на котором она сознательно отказывается от автономного существования, погружаясь в область гносеологических проблем «положительной науки». При этом характер философского анализа проблем абстракции нередко оказывает неоспоримое влияние на формирование образа той или иной положительной отрасли знания, если не непосредственно, то через задачу обоснования, поскольку в вопросах обоснования проблема отношения «теория — опыт» сводится к проблеме «абстракция — опыт». Именно здесь и вступают в силу методологические (философские) установки. Они особенно существенны тогда, когда общая потребность в обосновании определилась и вопрос только в форме обоснования.

Методологические установки представленного ниже повествования сложились в начале 60-х гг. Позднее они приобрели характер «методологической программы» — явления, типичного для второй половины 20-го века. Характеризуя интервальный подход как методологическую программу, её авторы выделили для себя пять основных её составляющих: 1) исходную единицу анализа (её исходный гносеологический таксон); 2) исходную проблему, определяющую направленность исследования; 3) главный гносеологический тезис, выражающий взгляд на возможность познания («да» или «нет»); 4) конструктивный элемент программы, в котором представлена основная идея авторов программы; 5) наконец, общую модель процесса познания.

Поскольку главный гносеологический тезис интервальной программы включал безусловное «да», а в качестве исходной единицы анализа было принято понятие абстракции, возникала естественная потребность в согласовании этих двух элементов программы. В самом деле, определяя абстракцию как *метод намеренно неполного знания* (а это следовало из всех известных «словарных», да и не только словарных, её толкований), необходимо было дать объяснение почти парадоксальному тезису, который по существу составлял четвёртый пункт интервальной программы: «знание может быть частичным и всё-таки оставаться полным в себе»¹.

Признаюсь, ни тогда, ни теперь я не знал и не знаю, как это сделать с точки зрения господствующей парадигмы, утверждающей, что всякая абстракция есть «упрощение», «огрубление», «омертвление» действительного положения вещей. Следовательно, ревизия понятия «абстракция» в этом смысле была необходима.

Тревожил и информационный аспект проблемы. Если главный гносеологический тезис содержит безусловное «да», то по мере углубления познания информация должна расти, а не исчезать. Но чистое отвлечение (если только не иметь в виду временный отказ из тактических соображений) есть потеря информации. А это в конечном счёте ведёт «к ничему». Чтобы сохранить третий пункт, пришлось ввести *принцип наследования информации* по мере реализации последовательных обобщений².

Наконец, указанный выше вопрос о полных истинах, об исчерпывающем знании о чём-либо, — это вечный философский вопрос. И ответ на него, с точки зрения всё той же парадигмы, был таков: полное знание (то бишь абсолютная истина) абсолютно недостижима. Мы можем только асимптотически приближаться к полному знанию. Зато на этом асимптотическом пути мы кое-что можем знать приблизительно (то бишь относительно).

Откровенно говоря, я не разделял и этой теории. Во всяком случае, она не давала вразумительный ответ на вопрос об отношении полного (абсолютного) и неполного (относительного) знания. Если для наглядности мы представим себе «чистую» объективную реальность в виде прямой, перпендикулярной в точке *a*, то предел асимптоты в этой точке, как известно, будет равен бесконечности. И как ядовито заметил Галилей, в бесконечности такую же часть составляют «много», как «мало» и как «ничто»³.

Я всегда считал, что истина либо есть, либо её нет. И если я говорю, что «это истина, хотя ещё и не вся истина», то это только *façon de parler*, а вовсе не убеждение в существовании неких «полуистин». Я понимаю интуиционистов, когда речь идёт о неразрешимости или неустановимости истинностных значений высказываний. Но ведь при этом, как показал Гливенко, речь не идёт о каком-либо третьем значении истинности — о чём-то, что не истинно и не ложно, а приблизительно истинно, скажем истинно на одну треть.. Поэтому интервальный подход, отказываясь от постулата об асимптотическом приближении, заменяет его понятием о *гносеологической точности* знания. Именно в связи с этим понятием, как это ни покажется парадоксальным, приближённые методы познания реальности с точностью до ϵ оказываются фундаментальными, а абстракции оказываются средством «полного в себе» знания в соответствии с тезисом

Эшби и научной позицией Галилея: «я утверждаю, что человеческий разум познаёт некоторые истины столь совершенно и с такой абсолютной достоверностью, какую имеет сама природа»⁴. Этого же убеждения держались Лобачевский и Пуанкаре. И об этом я подробно говорю в этой книге.

Понятно, что в свете сказанного конструктивным элементом интервальной программы должна была стать *система абстракций*, тактика и стратегия их применения в познавательном процессе. А для этого оказалось невозможным ограничиться той связкой абстракций, которая была унаследована от традиционной логики с добавлением математических абстракций бесконечности и осуществимости. При интервальном толковании познавательного процесса в понятие «абстракция» следовало вложить больше содержания, чем его могла дать идея «отвлечения». Кроме того, потребовалось поставить вопрос о *гносеологическом мероопределении абстрактных объектов* и ввести для этой цели ряд новых для философии понятий — интервал абстракции, интервальная ситуация, интервальное равенство, интервальная неразличимость, гносеологическая фокусировка и ряд других. Их использование позволило по-новому поставить проблему истинности знания. А такие понятия, как «интервальная ситуация», «гносеологическая фокусировка» или «гносеологическая точность» позволяют, помимо прочего, реабилитировать некоторые научные гипотезы и теории, снять с них обвинение в противоречивости или некорректности.

Работая в новой области, неизбежно приходится руководствоваться интуицией. Но если иметь в виду целое, ради которого и приходится работать, то нельзя забывать, что ясность целого определяется ясностью его частей. На сегодняшний день интервальная концепция, несмотря на обилие фактов, её подтверждающих, всё ещё является феноменологической по существу ввиду недостаточной разработанности её логических основ. Однако кое-что в этом направлении всё же сделано — заявлена новая область исследований, которую я называю *логикой абстракций*. И не только заявлена. Для некоторых абстракций уже эксплицирована сопряжённая с ними логика. В частности, на этой основе строится новая (интервальная) концепция тождества. При этом знаменитый лейбниевский принцип оказывается предметом более точного гносеологического анализа.

Об этом я не говорю в этой части книги. Собственно логике абстракций я посвящаю вторую часть. Её основная идея — сопоставить каждой вводимой абстракции ясный логический образ. Это был бы первый шаг к созданию теории абстракций *par excellence*, в которой абстракции были бы замкнуты логической связью, а не блужда-

ли бы одиноко каждая сама по себе. Конечно, для некоторых абстракций логические модели уже есть. Но эта работа требует продолжения.

Наконец, я хотел бы отметить ещё один факт, не отражённый в этой книге. Если интервальная концепция познания верна, то в общей картине мира придётся отказаться от привычного «идеала порядка». В общем случае мы не можем говорить об «интервальной реальности» как упорядоченной структуре в математическом смысле термина «порядок». Если же мы хотим сохранить термин «структура», то с большой вероятностью следует ожидать структуру с «испорченным порядком». Пользоваться для её характеристики такими понятиями, как «иерархичность», «симметрия» и пр. придётся с большой осторожностью. Интервальная структура, вообще говоря, не моделируется кристаллической решёткой, хотя в локальной области порядок, конечно, возможен. Таким образом, отаправляясь от чисто логической (а не физической) точки зрения, интервальный подход *mutatis mutandis* оказывается в общем круге идей, провозглашённых синергетикой.

Надеюсь, что эта работа не расходится с установками, указанными выше. Соответственно, и задачи, поставленные в ней, определяются, во-первых, интервальным методом исследования (с целью по возможности адекватно отразить некоторые реалии, относящиеся к сфере общей научной методологии) и, во-вторых, постоянной необходимостью развития и совершенствования логики научного познания, в которой проблемы научной абстракции и абстрактных моделей, равно как и всей логико-методологической составляющей, во многих случаях являются определяющими для содержания научных теорий. В 60-е гг., когда логика научного познания получила в России возможность для самостоятельного и более полного развития, тема абстракции привлекала многих отечественных методологов науки. Однако со временем интерес к этой теме был утрачен, хотя основной объект изучения — процессы формирования и использования абстракций в качестве важнейшей составляющей технологии научного мышления — остался. Между тем, собственное развитие науки и соответствующие перемены в способах и средствах научного познания требуют постоянного обновления этой темы, обсуждения её с различных философских и методологических позиций и решения тех проблем, которые возникают или остаются нерешёнными или необъяснёнными. При этом любое углублённое осмысление характера абстрагирующей работы мышления значимо не только для философии. В частности, оно необходимо для прикладной логики и

математики в условиях глобальной компьютеризации информационных процессов и признания ключевой (технологической) роли процессов абстракции при создании машинных программ. Не случайно тема абстракции стала одной из центральных в информатике. Но если потребность в абстракциях (и их анализе) весьма ощутима в случае оптимального оперативного планирования вычислений, где информационные процессы сравнительно скромны, то в случае обработки и преобразования произвольной знаковой информации фундаментальная роль абстракций сомнению не подлежит.

Примечания, которые представлены в конце книги, — наглядный пример тому, сколь многому и многим она обязана в своём содержании. Что же касается её непосредственного «появления на свет», то (помимо случайных обстоятельств) необходимо с благодарностью указать на два постоянно действовавших фактора: на финансовую поддержку Российского гуманитарного научного фонда (грант №98-03-04187) и на дружескую поддержку доктора И.П.Меркулова.

ВВЕДЕНИЕ. ФИЛОСОФИЯ И НАУКА

В каком-то смысле наука и философия представляют собой лишь разные аспекты одного великого дела человеческого мышления.

*Альфред Норт Уайтхед,
«Приключение идей»*

Философия больше, чем любая конкретная наука, связана со взаимоотношениями различных наук.

*Бертран Рассел,
«Логический атомизм»*

Известно, что к проблемам познания приводит естественное развитие предмета, историческая необходимость, обычная любознательность или сомнение, да мало ли вообще что! Но в любом случае и философия и наука начинаются если не с удивления, то с вопроса. Посмотреть на «обычное» необычным образом, сделать некоторое неизвестное предметом размышления, предметом мысленного или экспериментального анализа — это непосредственный первый познавательный акт. И этот акт в своей основе является не только специально научным (если таков предмет и такова цель исследования), но и философским, определяемым мировоззрением исследователя, его «духовной установкой», в чём, собственно, и проявляется **философская составляющая** научной работы. Важность этой составляющей часто недооценивается. Её считают чуждой точному «складу» науки, отводя философу скромную роль комментатора готовых результатов. Между тем, философский анализ в сфере «точных понятий» особенно необходим тогда, когда интерес к этим понятиям является не только субъективным, а вызревает «изнутри», в недрах самой этой сферы, обусловленный необходимостью её дальнейшего развития. В этом случае он оказывает неоспоримое влияние на формирование «собственно научных» идей и методов. По замечанию академика Вернадского, именно исходная философская установка «в общем и в частности создаёт ту среду, в которой имеет место и развивается научная мысль. В значительной мере она её обуславливает, сама меняясь в результате её достижений»⁵.

К примеру, синтез философии и математики, начиная с античности и кончая её современным состоянием, можно наблюдать на каждом новом этапе развития математической мысли. Каждое из известных нам сегодня математических направлений имеет определённый философский смысл, являясь реализацией тех или иных философских установок в науке. Что же касается современной формальной логики, то её связь с философией стимулируется прежде всего задачами обоснования математических концепций — научным направлением, имеющим весьма общий методологический характер.

Философский элемент в рамках методологии науки представляет самосознание науки, размышление над её принципами, правилами и методами и даже над стилем мышления, применяемом в научном исследовании. Философия науки — это мысль «второго порядка», мысль о мысли, рефлексия над тем, что уже так или иначе принято как знание первого порядка. Эта философская рефлексия, вообще говоря, весьма далека от функций «контроля и регулирования» науки, хотя она и служит критическому анализу научного знания. Это скорее заинтересованный «взгляд со стороны», помогающий научному творчеству избежать изоляции от общих проблем науки в их историческом и методологическом аспекте и не «утонуть в мелочах».

Необходим ли для науки такой взгляд?

Может ли наука обойтись своими силами и без участия философской мысли, определённых философских установок?

На эти вопросы разные мыслители отвечали по-разному. Мах, к примеру, отвечал, что «да», а Эйнштейн, напротив, — что, безусловно, «нет». И хотя Пайс замечает, что философия, расширив кругозор Эйнштейна, не оказала при этом прямого влияния на его творчество, сам Эйнштейн смотрел на философию не только как на превосходное прибежище научной мысли, но и полагал, что философские концепции необходимы для создания науки. В частности, он считал, что наука «без теории познания (насколько это вообще мыслимо) становится примитивной и путаной»⁶. Близкого взгляда придерживался, по-видимому, и Николай Николаевич Лузин, говоря, что философские рассуждения при их постоянной неопределённости служат «для того, чтобы отличить истинно плодотворное направление от бесконечного множества других»⁷. В свою очередь, Вернадский писал, что никогда «не наблюдали мы... науки без философии, и, изучая историю научного мышления, мы видим, что философские концепции и философские идеи входят как необходимый, всепроникающий науку элемент во все времена её существования»⁸.

Отыскать чистый случай философского влияния на развитие науки, коль скоро речь идёт о значительных временных периодах этого развития, разумеется, очень нелегко. Но иногда это всё же бывает заметно сразу. К примеру, «смутно очерченные философские идеи относительно понятия существования в математике привели к созданию таких формализованных логических систем, которые с математической точки зрения оказались эквивалентными теории решёток открытых подмножеств в топологических пространствах»⁹. К слову сказать, наследники этих «философских идей» при этом активно чурались привнесению в математику каких-либо метафизических аргументов, хотя отчётливо понимали, что математика, как и философия, является умозрительной наукой, направленной на изучение «определённых функций человеческого разума», и потому, как таковая, сродни философии¹⁰.

Тут, конечно, можно посоветовать на то, что философия не раз давала повод вспоминать о предостережении Исаака Ньютона, который сравнивал философию со склочной сутяжной дамой и даже провозгласил тезис: «физика, берегись метафизики!». Но если сегодня разрыв между наукой и философией представляется много глубже, чем это было, к примеру, в эпоху Нового времени, от которой мы ведём счёт современной науке, то причины этому вовсе не в склочном характере философии¹¹.

Быть может, отчасти в этом «повинно» то направление в философии (экзистенциализм), которое величайшим её достижением объявило право на философское познание «вне науки», но вовсе не потому, что такое познание в принципе возможно, а потому, что принципиально невозможно как раз научное познание — познание «через объект, через общие понятия (читай: через абстракции — *М.Н.*), отнесённые к объектам»¹². А это совсем не та позиция, которая, признавая за философией свободу спекулятивного творчества вне науки, ставит философию между наукой и теологией. «Всё точное знание, — говорит Рассел, — принадлежит науке; все догмы, поскольку они превышают точное знание, принадлежат к теологии. Но между теологией и наукой имеется Ничья Земля, подвергающаяся атакам с обеих сторон; эта Ничья Земля и есть философия»¹³.

Промежуточная позиция философии мучительна сама по себе независимо от того, имеются ли основания для подобных атак. К тому же не раз случалось, что философские системы, увлекавшие талантливых мыслителей и обещавшие так много при своём рождении, становились со временем подобны пустующему храму, в который не ходят, потому что утрачен смысл священных писаний и значений символов. К счас-

тью, с философской мыслью в целом, как перманентным явлением в сфере духовного развития человеческих сообществ, этого не случилось никогда, ведь философия — это часть гуманитарной культуры, зеркало, в котором, по выражению Сартра, человек видит своё лицо.

Известно, что большая часть нашей интеллектуальной активности основана на господствующих в данное время стандартах в сфере культуры, образования, языка и мышления. Даже самые оригинальные идеи находятся в плену определённой традиции. Как отметил уже Аристотель, то, что мы ищем, определяется тем, что мы знаем. И любопытно, что философия задаёт свои вопросы и отвечает на них обычно тогда, когда ещё молчит наука. Это верно прежде всего по отношению к философии науки, — своего рода амальгамы, составленной из определенных философских концепций и собственно научных концепций и фактов, которые призваны служить основанием (подтверждением) этих концепций. Правда, потребности нашего духа в основаниях для наших убеждений и само понятие «разумных оснований» исторически и социально обусловлены. Нередко такие основания создаются и *ad hoc*. Но это не меняет главного в отношениях философии и науки: именно пересечение философского и частнонаучного подходов приводит к возникновению самостоятельных форм самосознания науки с их преимущественным вниманием к основаниям научного познания, к предпосылкам и абстракциям, которые лежат у истоков этих оснований и которые во многом ответственны за «траекторию развития» научного познания, особенно в переломные моменты этого развития. И было бы опрометчиво отрицать, что опыт философского анализа оказывал в прошлом и оказывает теперь неоспоримое влияние на выработку конкретно-научных идей, входит в историю этих идей. Если со временем он выносятся за скобки этих идей, то только как их общий множитель. Серьёзная оценка научного направления в конечном счёте сводится к умножению на этот множитель.

Вот почему философия науки — это не только предьстория науки, не только «строительные леса», которые после постройки какой-либо точной отрасли здания можно и даже нужно отбросить. Говоря о философской составляющей научного знания, я не думаю, что она чужда той строгой архитектонике понятий, которая развивается из «смутно очерченных философских идей». Каждая законченная научная теория в своих понятиях и методах навсегда сохраняет характер инспирировавшей её философской мысли, тех или иных духовных установок.

Влияние философского анализа не всегда, конечно, оказывается прямым, приводящим к стадии конкретно-научных разработок. Но по крайней мере оно проявляется косвенно — в определённой гносеологически значимой ситуации, в стандартах, нормах и идеалах концептуального оформления научного знания, в способах его ассимиля-

ции и трансляции, в частности, в той духовной установке, руководствуясь которой, ученые понимают и объясняют объективную ценность результатов их работы. Не случайно в рамках собственно научных исследовательских программ сохраняется, с одной стороны, определённый «гносеологический запрос» при выборе путей исследования, а с другой — потребность в философском осмыслении результатов научных исследований, полученных на выбранном прежде пути.

Об этом очень образно высказался Герман Вейль, научную деятельность которого неизменно сопровождали «философские побуждения»: «В духовной жизни человека отчётливо различаются, с одной стороны, сфера *действия* (Handeln), созидания форм, конструирования, — это сфера, которой посвятили себя активно работающие художники, учёные, инженеры, государственные деятели и которая подчинена императиву объективности, — и сфера *осмысления* (Besinnung), с другой стороны; эта сфера реализуется в понимании и на неё следует смотреть как на борьбу за *смысл* (Sinn) наших действий как собственную сферу философа. Творческому деянию, не контролируемому осмыслением, грозит опасность утраты смысла — оно может сбиться с пути и, окостенев, превратиться в рутину, но и осмысление подстерегает опасность — выродиться в подрывающие творческие силы человека «рассуждения по поводу», которые нико-го ни к чему не обязывают»¹⁴.

Философия — это одно из многих измерений нашей духовной жизни и нашей интеллектуальной организации. И сама философия, как известно, первая подвергла критическому анализу особенности этой интеллектуальной организации, те основные её формы, посредством которых осуществляется понимание (осмысление) всех прочих явлений жизни и действительности. Она сделала это, создав *теорию познания*, — основной предмет изучения ключевых средств, методов и условий познания, к которым человеческое сообщество (учёный мир) обращается время от времени, независимо от того, как далеко оно продвинулось в своём цивилизованном развитии.

Образно наше познание можно представить как вектор-процесс, который переводит наше сознание из одного состояния знания в другое, часто более глубокое. И хотя это только образ, своего рода метафора, эта метафора полезна в особенности применительно к философским системам (теориям), которые, как и векторы, трудно сравнивать по признакам «лучше» или «хуже», но можно сравнивать по их модулям — по величине полезного результата, по эвристическому потенциалу, по объёму «увиденного» и поставленных вопросов. Ведь

философия, по замечанию того же Аристотеля, постоянно ищет свой предмет исследования. Она ищет «загадки мира», хотя никогда их не решает (Вернадский).

Конечно, поиск ответов на философские вопросы дело весьма и весьма затруднительное не только потому, что массив информации необычайно велик. Просто нет общепринятых (общезначимых) ответов на эти вопросы в принципе. Ситуация очень похожа на ту, с которой мы встречаемся при разрешении парадоксов. Имеется множество правдоподобных решений, но нет решения, с которым согласились бы все. Поэтому каждый должен сам выбирать для себя подходящую философию, такую, которая удовлетворит его мировоззренческие запросы, потребность в жизненной перспективе или в перспективе научного исследования.

Выше я выделил философию как часть нашей умственной культуры. Подобным образом выделяют и технологию как часть нашей материальной культуры. И хотя это части одного общего явления, они не всегда соседствуют (сосуществуют) в согласии между собой или связаны отношением функциональной (линейной) или причинной зависимости. Но всё же некоторая корреляция (и нередко даже отрицательная корреляция) между ними определённо есть.

Зато у философии и науки характер явно «родственных отношений», если только согласиться с весьма общим толкованием науки как «попытки привести хаотическое многообразие нашего чувственного опыта в соответствие с некоторой единой системой мышления»¹⁵. И дело не в том, что первые такие системы были созданы самой философией. Много важнее то, что и наука и философия, создавая системы мышления, рождаются из потребности человеческого разума перейти пределы непосредственно увиденного и услышанного, перейти в мир абстрактных реалий, в мир причин, законов и принципов: «если мы хотим получить законченную, замкнутую в себе, закономерную картину мира, то мы должны допускать за вещами, которые мы видим, ещё другие, невидимые вещи и искать за пределами чувств ещё скрытые факторы»¹⁶.

Наблюдение, измерение, эксперимент — это основные элементы чувственного опыта. «Красивый эксперимент, — говорил Эйнштейн, — сам по себе часто гораздо ценнее, чем двадцать формул, добытых в реторте отвлечённой мысли»¹⁷. И всё же абстрактные понятия — это основные элементы умственного опыта, рационального осмысления действительности, хотя и те и другие выступают как сопряженные моменты в диалектике познания того, что нередко назы-

вают «абсолютной истиной»: от данных наблюдений мы переходим к абстрактным формам, а затем вновь возвращаемся к этим данным, проверяя надёжность созданных разумом форм.

Размышляя об этой «странной двойственности научной мысли, требующей одновременно эмпирического и рационалистического языка для своего выражения»¹⁸, не следует забывать о том, что, создавая понятия «по ту сторону явлений» чувственного опыта, приходится, по выражению Пуанкаре, «перескакивать бездну». Вот почему главная проблема любой теории познания (будь то эмпиризм или рационализм) — это *проблема универсальных утверждений* (\forall -утверждений), проблема обоснования их истинности. И здесь пути философии и науки нередко радикально расходятся.

Наука ошибается не в открытых ею законах, а в их обычной оценке как абсолютных, то есть безусловных, истин. Открытые ею законы она не любит представлять как гипотезы. «Hypotheses non fingo» — сказал Ньютон, отдавая на суд истории свои «Математические начала». Но для философии проблема абсолютной истины — это «открытая проблема», подобно тому, как проблема «десяти нулей подряд» в разложении числа π — это открытая проблема математики. Именно в этом (философском) контексте прозвучал когда-то расселовский вопрос: а есть ли вообще знание столь неоспоримое, что ни один разумный человек не может усомниться в нём?

«Этот вопрос, — говорит Рассел, — который на первый взгляд может показаться нетрудным, на самом деле труднейший из возможных. Если мы представим себе все трудности, препятствующие ясному и прямому ответу, то этим мы хорошо подготовимся к изучению философии, так как философия есть попытка ответить на эти последние вопросы, ответить не необдуманно и догматически, как мы отвечаем в обыденной жизни и даже в науках, но критически, выяснив предварительно как трудность самого вопроса, так и неопределённость и неотчётливость, свойственные нашим обыденным представлениям»¹⁹.

Добавлю, что для многих философских «систем мышления» такое знание (абсолютная истина) подобно бесконечно удалённой точке проективной геометрии: оно лежит дальше всякого условного (относительного) знания, которое одно достижимо в практике научного познания и в котором допускается сомневаться. Абсолютная истина — это скорее направление, чем результат познания²⁰.

В виду многообразия научных и философских систем мышления трудно, конечно, дать полный их сравнительный анализ. Известно, что большинство великих философских систем теснейшим образом связаны с научным познанием мира, с научным мировоззрением. Поэтому великие философы сами нередко были активными строителями этого мировоззрения (Аристотель, Декарт, Лейбниц, Кант, Рассел и др.) или оказывали на него влияние. При этом их философию неизменно отличало стремление решать проблемы познания «в духе науки», хотя это были проблемы, которые не поддаются в целом точному и однозначному анализу, а потому и не могут считаться проблемами самой науки.

Всего ближе философскую составляющую в пространстве научного познания представляют логика и методология науки. Говорят, что методология — это отчасти наука, отчасти ремесло и отчасти мифология. Наука, поскольку методология опирается на факты, аксиомы и принципы науки. Ремесло, поскольку методология — это профессиональное занятие методологов. Мифология, поскольку методология в целом — это система взглядов, опирающаяся в значительной части на «спекулятивное» мышление, обременённое «трансцендентным».

Я не стану раскрывать содержание всех этих аспектов методологии. Но, говоря об отношении науки и метода, я хочу привести обширную цитату из давней статьи французского учёного и методолога Жана Луи Дегуша, очень ясно обрисовавшего суть этого отношения: «В науке любая действительно важная проблема возникает как проблема метода. В самом деле, если для проблемы, которую нам предстоит решить, метод уже известен, тогда достаточно применить к ней этот метод и поиск решения сведётся к чисто технической задаче. Напротив, если метод решения нам неизвестен, необходимо прежде всего найти именно метод. Тогда проблема решения становится методологической проблемой. Сам метод может быть техническим элементом науки, о которой идёт речь. Но он может включаться и в более общие рамки. К примеру, есть арифметические проблемы, метод решения которых лежит за пределами самой арифметики и принадлежит к области анализа. Все такие методы являются частью какой-либо отдельной науки. Но если мы рассматриваем проблемы более общие, относящиеся к научному познанию вообще (а не только к частным проблемам какой-то одной дисциплины), то вопросы методологического порядка на этот раз выходят за рамки какой-либо отдельной науки. Это будут методы, отвечающие на те вопросы, которые принадлежат к

компетенции методологии. При этом можно различать, с одной стороны, общую методологию, пригодную для всех наук, и, с другой стороны, методологию, свойственную каждой науке»²¹.

К сказанному остаётся прибавить важную мысль Вернадского (впрочем согласующуюся с мыслью, приведённой выше), что научное мировоззрение, равным образом как и всякое иное, не является синонимом истины и что в основе научного мировоззрения лежит именно *метод* научной работы²².

ГЛАВА 1. ИНТЕРВАЛ АБСТРАКЦИИ КАК ПРОБЛЕМА МЕТОДОЛОГИИ

Педантичность во многом противоположна игре словами.

Стивен Бар,
«Топологические эксперименты»

В моих статьях так часто встречается выражение «интервал абстракции» без явных претензий на определение, что это лингвистическое новшество можно принять как весёлую игру словами, придуманную лишь для того, чтобы запутать читателя. Между тем, у того, кто придумал это выражение, намерения были самые серьёзные. А придумали его — Феликс Лазарев и я в 1960 году в совместной статье, которую мы тогда же предложили журналу «Вопросы философии». Эта статья не была напечатана по основанию действительно весьма забавному: редакция попала в ситуацию «буриданова осла» — половина рецензентов хвалила одну половину статьи, но порицала другую; другая половина рецензентов поступала в точности наоборот.

С тех пор Лазарев и я, каждый по-своему, старались внедрить это выражение в тезаурус научных понятий, оставляя за собой право действовать вполне самостоятельно, хотя в частых совместных беседах мы были единодушны в признании его полезности и постоянно работали над его содержанием, чтобы уяснить хотя бы для самих себя некоторые проблемы теории познания, которые нам тогда казались особенно важными²³. Справедливости ради отмечу, что наш *философский интервальный анализ* зародился за шесть лет до того, как вышла первая монография по интервальной математике, которая сделала «интервал» основным предметом теории²⁴. Только речь в ней шла, конечно же, не об интервалах абстракции.

Увы, как я теперь вижу, ввести эвристически ценное философское понятие легче, чем претворить в теоретическую разработку соответствующую ему идею. Ведь осуществление такой идеи похоже на цепную реакцию, когда приходится «передумывать» многие дру-

гие, уже привычные, понятия. Более того, философские идеи редко поддаются прямой «аппаратной реализации», и философия не принадлежит к дисциплинам, методы и понятия которых пригодны для такой реализации. Но при любом начинании научных изысканий полезно всё же помнить слова Пьера Бейля, что точное и полное объяснение самого ничтожного предмета обязательно ведёт к высшей метафизике, а метафизика, как выразился уже другой учёный, может быть лучше и полнее всего определена как изучение главных абстракций человеческого ума ²⁵.

В известном смысле теория *интервала абстракции* сравнима с аналитической теорией языка. Целью последней является выявление «типовых» структур предложений, их элементов и возможных отношений этих элементов. Цель первой — выявление типовых структур методов абстрагирования, их элементов и отношений между этими элементами. Идея интервала абстракции — это идея философского осмысления онтологических и гносеологических предпосылок неуниверсальности абстрактных моделей. При этом понятие интервала абстракции помогает оценить и выявить эти структуры с наибольшей полнотой, поскольку именно «интервальность» лежит в их основе.

1.1. Интервал абстракции

Указанная выше трудность определения этого понятия, по-видимому, вполне объективная и относится к тому случаю употребления понятий, когда бывает необходимо оставаться, так сказать, «контролируемо неточным» (Ст. Бар). А это случается даже в точных науках, таких, скажем, как математика.

И хотя, как отметил Кант, «и в метафизике, и в других науках можно многое с достоверностью сказать о предмете, не давая его дефиниции» ²⁶, тем не менее, любая, в том числе и контролируемая, неточность или неопределённость понятия должна быть как-то восполнена контекстом изложения. Применительно к понятию «интервал абстракции» таким восполнением может служить только объяснение его «появления на свет».

Итак, начну с того, что интервальная концепция сложилась прежде всего на фактах *независимости* в мире событий и явлений. Можно предположить, что с понятия о независимости вообще начинается современная наука. Припомним хотя бы историю с доказательством независимости пятого постулата (Евклида), историю с постулатом о независимости от той или иной инерциальной системы

отсчёта основных законов механики (принцип относительности Галилея), доказательство независимости скорости света от скорости движения источника света (опыт Майкельсона — Морли).

Эти и другие примеры преподают для философии следующий урок: постулат диалектической философии о всеобщей связи явлений, о том, что каждая «вещь (явление, процесс etc.) связаны с *каждой*»²⁷, необходимо отбросить как теологический, заменив его научно обоснованным **утверждением о существовании независимых явлений**. Отсюда, как следствие, «одной из важнейших задач философии естественных наук... является выяснение и уточнение тех предпосылок, при которых можно какие-либо данные действительные явления рассматривать как независимые»²⁸.

Почти сорок лет назад, когда Ф.В. Лазрев и я продумывали концепцию интервальной теории познания, мы сформулировали шуточный принцип этой теории: «всё, что можно оторвать, должно быть оторвано, не следует отрывать того, чего нельзя оторвать». Я думаю, этот принцип совершенно ясен тому, кто принимает абстракцию не только как метод намеренно неполного знания, но и как единственно доступный нам метод исчерпывающего «познания по частям». Но для этого необходима гипотеза объективной независимости явлений.

В интервальной концепции эта гипотеза оформилась в логический **постулат посторонней посылки**: прибавление или удаление посторонней посылки не изменяет следствия. При этом вопрос о доказательстве постороннего уточняется следующей теоремой: «Если *C* является следствием в контексте событий *A&B* и в контексте событий *A&¬B*, то *C* является независимым от событий *B* и *¬B*, а последние, соответственно, — посторонними по отношению к событию *C*».

Справедливости ради напомним, что эта теорема уже была указана Ст. Джевонсом под именем «отвлечение безразличных обстоятельств»²⁹, хотя, размышляя над интервальным смыслом процесса абстракции, я открыл её для себя независимо от Джевонса, придав ей ещё иную форму логического закона:

$$((A \& B \supset C) \& (A \supset C)) \supset (A \& \neg B \supset C)^{30}.$$

По существу эта вторая форма закона посторонней посылки формально воспроизводит неформальную мысль Аристотеля: «присутствие или отсутствие чего незаметно, не есть часть целого»³¹.

Как нетрудно заметить, теорема о посторонней посылке (при отсутствии закона *ex falso sequitur quodlibet*) очень естественно локализует противоречие как средство дедукции, указывая на его посто-

ронный характер по отношению к следствиям из *действительных* посылок. В самом деле, имея противоречие и получив вывод *B* из *C* (при любых непротиворечивых *C* и *B*), мы можем преобразовать этот вывод в два других с посылками *C&A* в одном и *C&¬A* в другом, что вернёт нас к исходному пункту, подтвердив (в силу теоремы о посторонней посылке), что мы не извлекли из допущенного противоречия никакой новой информации. С другой стороны, имея противоречие и построив два аналогичных вывода, мы отбросим оба члена противоречия как посторонние посылки.

В методологическом плане решение вопроса о посторонних свойствах обеспечивает обоснованность абстракции при решении определённой задачи, когда этот вопрос ставится по отношению к целям и методу абстракции. Но так как в разных условиях эти цели и методы могут быть различными, мы не должны увлекаться ни абсолютной релевантностью тех или иных свойств, как это делала схоластическая философия, ни их абсолютно посторонним характером. Всегда полезно иметь в виду их интервальную относительность.

Тем не менее, выяснение того, какие из многочисленных свойств объекта являются посторонними, — это, по существу, главный вопрос абстракции: *пренебречь можно только посторонним, но посторонним необходимо пренебречь*, как в гносеологическом контексте, когда просто «мешают трудности, не относящиеся к делу»³², так и в семиотическом контексте «установления и прослеживания связей», когда речь идёт об обосновании научной теории³³.

Очевидно, что этот главный вопрос не совпадает с традиционным философским вопросом о существенных и несущественных свойствах хотя бы потому, что отвлечение от постороннего предполагает направленность внимания не на объект сам по себе, а на его роль в определённой гносеологической ситуации, когда явно фиксируются цели, средства и объективные условия для области значения абстракции. Вопрос о границах этой области не всегда допускает априорный ответ. Но он естественно приводит к вопросу об интервале абстракции — либо как количественной характеристике *меры свободы отвлечения*, либо как *меры информационного содержания абстракции*, совпадающего с набором общих свойств класса её возможных моделей. Таков, в частности, случай основных абстракций какой-либо формальной теории, которые очерчивают и замыкают круг возможных моделей этой теории независимо от их онтологического статуса и индивидуальных особенностей, хотя обычное осмысление теории, включая её аксиомы и прочие принципы, идёт, как правило, иным путём — путём интерпретации этой теории в заве-

домо данных моделях. Типичный пример – осмысление решений обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений в частных производных как законов природы посредством предварительного выбора «краевых условий».

Вопросы о релевантном и постороннем, об общности и интервале абстракции нередко решаются одновременно. Например, обобщение законов движения на область электромагнитных явлений «переводит» фактор конечности скорости материальных взаимодействий из постороннего (для классической механики) в релевантный (для релятивистской механики), чем одновременно уточняются и границы применимости (интервал) абстракций классической механики, и, в частности, интервал её *гносеологической точности*³⁴. При этом отношении между этой теорией и её моделями определяется метрической организацией опыта, поставляющего эти модели, а экстраполяция её абстракций на новые (другие) модели требует, в свою очередь, улучшения измерительной техники, что рано или поздно приводит к границам экстраполяции.

Разумеется, когда я связываю понятие интервала абстракции с понятием граничных условий, я имею в виду не те границы, которые обнаруживаются после того, как в процессе применения абстракции (обычно экстраполяции) для неё обнаруживается контрпример. Нет, я имею в виду прежде всего тот случай, когда границы абстракции можно заведомо предусмотреть, когда информация об этих границах представлена теоретически или может быть выявлена одним логическим анализом абстракции, как, например, в случае распознавания области определения функции по одному только аналитическому выражению этой функции. Только такие границы, по определению, я называю *интервалом абстракции*, придавая таким образом этому понятию собственно информационный смысл.

Можно предположить (впрочем, без явной уверенности), что понятие интервала абстракции в этом смысле родственно гегелевскому понятию «абстрактное значение», которое в самом себе обладает завершённой и выражает своего рода «долженствование» собственной реализации, требование объективировать своё субъективное значение. Переход к модели абстракции, её интерпретация – это и есть такое объективирование.

Конечно же, данное толкование термина «интервал абстракции» не единственное. Лазарев, например, склонен придавать этому термину онтологический смысл, называя интервалом абстракции «объективные границы, определяющие рамки однозначной применимости той или иной абстракции»³⁵. Однако такое понимание ин-

тервала абстракции ничем по существу не отличается от его толкования как области истинности абстракции, а все разговоры о границах истинности абстракции до интервального подхода к этой проблеме ограничивались именно этим и не касались вопроса определённости абстракции на области её значений. Между тем, не одно и то же, идёт ли речь об области истинности абстракции или об области её значений. Здесь та же трудность редукции, как и в случае экстенционала и интенционала понятия.

Пусть, например, теория задана двумя абстрактными условиями:

1. $\forall x \neg (xRx)$,
2. $\forall x \forall y \forall z (xRy \& yRz \supset xRz)$,

где R — это имя некоторого отношения, а переменные x, y, z пробегают некоторый класс объектов (универсум возможной модели теории).

Ясно, что в этом случае ни подразумеваемый класс, ни названное отношение не определены однозначно и, следовательно, речь здесь не может идти об однозначности интервала абстракции в его онтологическом смысле. Анализируя подробнее систему аксиом 1 и 2, нетрудно убедиться, что она описывает класс синтаксически неразличимых отношений порядка. Но мы можем пойти значительно дальше в исследовании того, что нам доступно только «изнутри» этой системы. Так, обе аксиомы а priori говорят, что отношение R не может быть отношением тождества, эквивалентности, различия или нестрогим порядком. Следовательно, если универсум возможной модели не пуст, то он не может быть одноэлементным. Но утверждать, что этот универсум содержит только два элемента или что число элементов больше двух, вообще говоря, тоже нельзя — их по меньшей мере два. Добавление новых различных элементов сохраняет истинность аксиом. Но она сохранится и в том случае, если новые элементы (например, начиная с третьего) мы станем отождествлять (не различать) с любыми из уже известных. Такого рода отождествления, разумеется, не определены заранее, их произвольный характер допустим лишь до тех пор, пока мы находимся *внутри* интервала абстракции. Но когда определённая онтология для абстракции выбрана, разрешаются уже не любые отождествления.

Из сказанного непосредственно и опять-таки а priori вытекает некатегоричность приведённой выше системы аксиом. Эта информация заключена внутри самой системы (теории), хотя, оставаясь исключительно в рамках теории, нельзя привести ни одного примера неизоморфизма её возможных моделей: любые попытки построения таких моделей требуют обращения к каким-либо внешним фак-

там, выходящим за границы абстракции. Теория указывает только на возможность их существования. Над интервалом абстракций данной теории её модели могут быть конечными или бесконечными, но внутри интервала абстракций нет средств, различающих мощности её моделей.

Тем не менее, это не означает, что аксиомы нашей формальной теории нельзя рассматривать как высказывания, пока они не сопоставлены с некоторой моделью. Аксиомы представляют собою абстракции, это верно. Но это не понятия с пустым объёмом. Их априорное содержание указано выше. А потому, с точки зрения, обусловленной интервалом абстракции, уже нельзя сказать, что «особенность понятия формальной теории в том, что здесь нет никакого базового множества», что это «некоторые аксиомы, заданные “ни на чём”, аксиомы в чистом виде»³⁶. Правда, базовым множеством нашей теории является не одно, а класс множеств, индивидуация элементов которого не выходит за рамки фиксированного интервала абстракции.

Такой «подход от абстракции» к онтологии понятия «мир» делает относительным противопоставление действительного мира возможным мирам, поскольку сама онтология оказывается функцией наших гносеологических установок. Вместе с тем на этом примере, по моему, ясно, почему и в каком смысле понятие «универсум теории» является гносеологическим понятием и почему вообще имеет смысл говорить об универсуме теории независимо от понятий «универсум структуры» или «универсум модели», хотя в естественных науках такое разделение универсумов не принято, поскольку «картины мира» здесь обычно всецело определяются как *образы* той или иной теории. Но в логике мы редко встречаем такую «информационную однозначность».

Рассмотренное выше понятие интервала абстракции определяется, как легко заметить, не объективными условиями «восхождения» от конкретного к абстрактному, а только собственной *логикой абстракции*, которая отражается в её синтаксической или смысловой структуре. Но именно это обстоятельство и позволяет естественным образом заявить об *абсолютном гносеологическом содержании абстракций*, которое, говоря словами Лобачевского, будучи однажды приобретённым, сохраняется навсегда. Кроме того, термин «интервал абстракции» в таком его истолковании приобретает известную эвристическую ценность, характеризуя содержание абстракции как неко-

торое требование, «вынуждающее» если и не сами модели, независимые от абстракций, то весьма общие «модельные условия», в которых отражается *замысел абстракции*.

Вместе с тем, учитывая, что осмысленность абстракции обычно связывают с её эмпирической применимостью, каждую модель абстракции естественно рассматривать как элементарное событие реализуемости этой абстракции, а полную информацию, содержащуюся в абстракции, связывать не с выбором одного события из многих возможных, а с выбором всех таких возможных событий. Тогда интервал абстракции естественно мыслить как *сумму информации*, заключённых в отдельных событиях, а класс всех возможных моделей абстракции — как объём этого понятия. И хотя такое толкование, вообще говоря, отличается от приведённого выше, отличие это не столь уж существенно в том (особенно важном) случае, когда для той или иной абстрактной теории можно доказать теорему о представлении или когда имеются достаточные основания для веры в такую возможность, как это обычно бывает при неформальном и интуитивном употреблении понятий.

Вторая основная идея, из которой выросла интервальная концепция, — это идея *относительности*. И здесь опять пришлось вступить в противоречие с главной чертой диалектического метода: объективность рассмотрения — это «вещь сама в себе». При этом невозможно было обойти молчанием замечание Эйнштейна о том, что тезис о реальности «самой по себе» (независимой от каких-либо наблюдений) не имеет смысла внутренне ясного утверждения; он обладает только программным характером и нужен для того, чтобы избежать солипсизма³⁷.

Тут стоит упомянуть по крайней мере три разных смысла, которые мы вкладываем в термин «относительность».

Первый говорит о приблизительности знания, о неполной информации о фактах, об «учёном незнании», о том, что наше суждение может оказаться ошибочным, если познание пойдёт дальше. Второй вводит относительность как результат сравнения — всё познаётся в сравнении и, следовательно, в отношении одного к другому. Наконец, третий говорит о зависимости наших знаний от принятой точки зрения, от системы отсчёта, от положения наблюдателя, о том, что всё наше знание подобно явлениям перспективы («положение наблюдателя» в этом случае есть некое объективное обстояние). При этом постулирование равноправия точек зрения, систем отсчёта, положений наблюдателя и пр. основывается, конечно, не на этических мотивах, не на «принципе терпимости», а на мотивах гносеологических и экс-

периментальных, связанных с потребностью разыскания общих принципов и законов, с анализом интересубъективных доказательств. К примеру, невозможность обнаружить экспериментально, в локальном опыте, «абсолютную» систему отсчёта индуцирует общую идею относительности всех систем отсчёта, идею их равноправия.

Но, принимая относительность как неизбежный постулат познания (хотя бы в том элементарном значении, что всё познаётся в сравнении, и следовательно, — в отношении одного к другому), желательнее избежать «плюрализма истины» в его чисто субъективистском смысле, а с объективностью истины связать не только её программный характер.

Хотя тема относительности, никогда не покидала пределы философского поля зрения, собственно научную прописку она получила заботами современной физики, которая начала с того, что способ описания сделала неотъемлемой частью физической теории, утвердив относительность знания к средствам наблюдения. Такая гносеологическая роль относительности (относительность «с точки зрения») вполне соответствует практике эксперимента, а также «аппарату теоретической физики, уравнения которой пишутся в тех или иных координатах»³⁸. Она соответствует и тому образу мысли, который утвердился в начале 30-х годов, когда центральным для физической науки стал вопрос о моделях математических абстракций новой (волновой, квантовой) механики. Чтобы избежать употребления «пустых» абстракций, постулировали *принцип наблюдаемости* физических величин. Он призван был одновременно оправдать и ограничить игру воображения рамками естественных условий наблюдения, нашим макроскопическим опытом. Заглядывать за кулисы этого опыта, вообще говоря, не запрещалось, но возможность в принципе указать наблюдаемые макроскопические параметры считалась необходимой для реальной характеристики физических явлений.

Конечно, здесь речь не о принципе относительности (в узком смысле), из которого мы извлекаем (как следствие) абсолютный характер физических явлений (в смысле их *абсолютной неразличимости* относительно инерциальных систем отсчёта)³⁹. Речь главным образом о такой относительности, где способы описания неотделимы от условий наблюдения и становятся частью физической реальности. По существу, только в этом случае возникает «плюрализм истины», которая становится истиной «с точки зрения». И если мы принимаем, что только законы природы *инвариантны* относительно определённого вида (теоретически допустимых) преобразований, нам

ничего не остаётся другого, как разделить реальность на ту, что существует «сама по себе» (законы природы), и ту, что существует только «для нас» как кантовский феномен. Таким образом, вопрос об объективности законов природы дополняется вопросом об объективности всех других явлений нашего познания, являющихся своего рода функциями от положения наблюдателя, от его системы отсчёта.

В связи с этим последним вопросом замечу, что если у каждого отдельного наблюдателя «самого по себе» система отсчёта может быть своя, то в связке «наблюдатель — теория» выбор системы отсчёта естественно ограничивается постулатами теории. Точка зрения (логика) наблюдателя поглощается точкой зрения (логикой) теории. В результате относительность научного познания всегда относительна к постулатам этого познания, которые сохраняют абсолютный характер в интервале принятых при этом абстракций. Признание этого факта, вообще говоря, не означает признания реальности, независимой ни от каких описаний этой реальности. К примеру, теоретико-множественная реальность в математике существует только как модель той или иной аксиоматической системы теории множеств и в этом смысле (в отличие от физической реальности) не является однозначной. Этот факт порождает общий вопрос о релевантности тех или иных описаний, о том, какие описания «к делу», а какие нет. При этом в теоретическом плане решающую роль приобретает система принятых основных абстракций, а в методологическом — требование их обоснования, их анализ и анализ абстрагирующей деятельности вообще.

Вместе с тем известно, что традиционное философское требование объективности познания соответствует такой гносеологической установке, согласно которой в конкретном истолковании научных фактов аргументация от способов описания является посторонней, своего рода логической ошибкой *ad hominem*, поскольку кажется, что релятивистская установка возрождает софистический «критерий основания» — мнение человека есть мера истины. А на это уже Платон заметил, что основание не может зависеть от субъективной воли человека, иначе придётся признать законность противоречий, и поэтому любые суждения считать обоснованными. Эта мысль Платона нашла отражение в аристотелевском «принципе непротиворечия». Позднее она увлекала и стоиков: «того, что кажется так каждому, недостаточно, чтобы было так»⁴⁰.

Можно сказать, что интервальная концепция в теории познания — это отклик на такого рода коллизии, когда речь идёт о необходимости корреляции классических и неклассических представлений об объективности научных фактов и научных теорий. Это стремление разрешить такие коллизии привлечением языка *интервальных образов* (понятий) там и для представления того, что обычно представлялось и описывалось на языке *точечных образов*.

Проблема связи интервальных и точечных образов для логики познания не нова. В научном сознании точечные образы как чисто теоретические абстракции обычно индуцируются из интервальных или определяются через них. При этом, чем грубее наш интервальный образ, тем дальше мы от образа точечного. Находясь как бы в обратном отношении, интервальные образы ассоциируются с познанием интуитивным и эмпирическим, а точечные — с познанием логическим. Таковы, в частности, понятие предела функции, определяемое через открытый интервал; понятие производной как идеальный точечный образ, получаемый предельным переходом из интервального образа отношения конечных приращений функции и её аргумента; понятие математического континуума, каждая точка которого определяется через интервальный образ её рациональных приближений и т.д., и т. п. И так обстоит дело не только в математике. В той мере, в какой естественные науки, желая получить абсолютно точную картину реальности, математизировались на основе анализа, в естествознании сам собою утверждался взгляд, что именно в точечных образах (дифференциальных уравнениях) должны выражаться его основные законы и понятия. «Момент! — улови его», иронизируя, восклицал философ. А естествоиспытатель без тени иронии улавливал его в образах производной и дифференциала. Мгновенная скорость свободно падающего тела, ускорение, давление, удельная теплота и пр. — всё это конкретные модели точечного образа производной. Соответственно логика и методология, создавая свою естественнонаучную картину мира, ориентировались, как правило, на точечные образы как на её абстрактный вариант. По крайней мере, топология пространства и времени всегда представлялась в ней как топология на точечных образах (вещественной прямой).

Иное дело, если эмпирическим (интервальным) представлениям о времени и пространстве (например топологии на конечных разностях) мы придаём самодовлеющее значение или, по крайней мере, полагаем, что интервальные образы ближе к реальности. Здесь мы всегда считаемся с пределами точности описания, обусловленной порогами ощущений, восприятий или оценок (регистраций) посред-

ством приборов, а следовательно, и с той информацией, которую мы можем реально извлечь из конечного опыта. Эта информация обеспечивает нам достоверно только *эмпирический континуум* на интервальных, а не на точечных образах. Перефразируя слова Пуанкаре, можно сказать, что этот эмпирический континуум всегда остаётся туманностью, неразрешённой на звёзды. В нём интервал является неустрашимым элементом анализа.

Именно на такой самодовлеющей роли интервальных образов и основывается интервальная концепция в теории познания. Она не претендует на глобальный охват всех фактов познания, а рассчитана только на то, чтобы адекватно отразить некоторые реалии, входящие в сферу научной методологии. И поскольку эта концепция родилась по зрелому размышлению над логикой процессов абстрагирования, её основная задача — интервальный анализ этих процессов, их истолкование в терминах *интервальной семантики*.

К примеру, наиболее полному такому истолкованию подверглась *абстракция тождества*. Подобно тому, как прикладная математика решение уравнения $f(x) = 0$ сводит к решению неравенства $|f(x)| < \varepsilon$, так и интервальная концепция понятие о логическом тождестве сводит (обобщает) к понятию о тождестве по ε -неразличимости ($0 \leq \varepsilon \leq \infty$), развивая свои собственные представления о *тождестве неразличимых*⁴¹. Уже это само по себе гносеологически очень существенно, поскольку от наших представлений (понятий) о тождестве зависят и наши представления об универсумах научных теорий со всеми вытекающими отсюда последствиями для научной картины мира. Иначе говоря, проблема тождества затрагивает самые основы наших знаний. Но об этом подробнее во второй части этой книги.

1.2. Интервальная ситуация

Выше я постарался пояснить, в каком смысле интервал абстракции играет роль гносеологической парадигмы, являясь отправным пунктом для анализа познавательных процессов. Теперь я хочу остановиться на другом важном понятии интервальной методологии. Прошло уже более двадцати лет, как я ввёл это понятие⁴². К сожалению, оно остаётся невостребованным другими методологическими установками, отличными от интервальной. Между тем я считаю его весьма полезным и далеко идущим обобщением понятия относительно-сти к системе (телу) отсчёта.

Итак, термином «интервальная ситуация» я называю всю совокупность граничных условий, включая условия реального или мысленного эксперимента, в которых приходится ставить и решать гносеологические задачи, и, соответственно, оценивать осмысленность возможных вопросов и ответов в рамках этих условий. Речь тут, конечно, об условиях гносеологических, о гносеологических ситуациях, в которых приходится создавать теоретическую картину явлений.

К примеру, любая мыслимая инерциальная система отсчёта задаёт интервальную ситуацию в гносеологическом смысле, порождая определённые условия для изучения механических свойств физических явлений; любое фиксированное число измерений пространства задаёт определённую интервальную ситуацию в таком же гносеологическом смысле, ограничивая или расширяя возможности не только для решения геометрических задач, но и для создания той или иной физической картины Вселенной.

Если сумму знаний определить как базу наличных данных в совокупности с возможностями абстрактного мышления (логикой), то интервальную ситуацию естественно считать источником наличных данных. Любые две интервальные ситуации, если они являются источником одних и тех же наличных данных, *эквивалентны*. Можно сказать и по-другому: две интервальные ситуации эквивалентны, если наблюдатель, создавая гносеологическую картину явлений и находясь поочерёдно в каждой из них, необходимо приходит к одним и тем же результатам. В противном случае интервальные ситуации неэквивалентны.

К примеру, Эйнштейн, объясняя специальную теорию относительности, указывает для начала на абсолютную абстрактность интервальной ситуации, в которой формулируются законы классической механики. В самом деле, чтобы их сохранить по отношению к разнообразию инерциальных систем отсчёта, приходится снять верхнюю границу для возможных значений скоростей. Теорема сложения скоростей естественно вводит эти значения в рамки абстракции потенциальной бесконечности. Вот почему условие ($c \rightarrow \infty$), при котором преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея, отнюдь не является бессмысленным, как иногда полагают. Но для классических представлений в этом условии нет необходимости, поскольку понятия «траектория» и «скорость» не входят в число «непосторонних» (инвариантных) понятий классической механики. И хотя скорость света (в первом приближении вычисленная Рёмером в 1676 г.) была известна до появления системы ньютоновских «Начал», этот опытный факт мыслился как рядовой и не мог повлиять на

формулировку системы, поскольку он не выводил за пределы той интервальной ситуации, которая отвечает абстракциям классической механики. В этих условиях чисто математический характер ньютоновской механики очевиден.

Опираясь на преобразования Лоренца, подтверждающие гипотезу о независимости скорости света от выбранной системы отсчёта (в противоречии с классической теоремой о сложении скоростей) и включая скорость света как *предельную скорость* в систему аксиом механики, Эйнштейн меняет интервальную ситуацию. Теперь, с учётом константы c , интервал возможных скоростей определяется постулатом $\forall \varpi (0 \leq \varpi \leq c)$, которому удовлетворяют модели и классической и релятивистской механики. Но при этом интервальная ситуация, в которой формируется гносеология релятивистской механики, приобретает подлинно эмпирический статус. Реальность, в которой $\exists \varpi (\varpi \geq c)$, в принципе возможна, но теория такой реальности будет уже «над интервалом» фундаментальных абстракций СТО.

А вот другой пример согласованности двух понятий – «интервала абстракции» и «интервальной ситуации». Закон спектрального распределения Релея – Джинса принято считать теоретически неверным и противоречащим результатам эксперимента – экспериментальному спектральному распределению энергии. Но если опыт с тепловым излучением рассматривать как случай интервальной ситуации, то факт несоответствия экспериментального распределения с теоретическим (по закону Релея – Джинса) можно попытаться объяснить, не впадая в противоречие. При этом ошибочность закона, основанного на классических представлениях, должна означать только недопустимость экстраполяции классической гипотезы о связи энергии и частоты излучения (о непрерывности распределения энергии) в условиях определённой интервальной ситуации, но отнюдь не абсолютный отказ от этой гипотезы. Начиная с некоторых значений частот, для классической формулы (закона) возникает ситуация неразличимости. Отсюда естественный, согласующийся с гипотезой (постулатом) непрерывности, результат: бесконечно большая энергия электромагнитного поля внутри полости. С интервальной точки зрения этот результат не является «внутренне противоречивым» и *внутри классических представлений* не может квалифицироваться как абсурдный. Напротив, закон Релея – Джинса даёт совершенно верную картину «бесконечности энергии» и функции распределения «изнутри» классических представлений об энергии как непрерывной функции состояния вещества, а утверждение, что

энергия электромагнитного поля внутри полости не может быть бесконечно большой, не является логическим следствием из этих представлений. Другое дело, что опыт с осциллятором выводит объяснение за рамки классических абстракций к квантовым представлениям.

Любопытно, что аналогичная ситуация возникает и в теории связи, где на основании классических представлений (теоремы Винера — Хинчина) приписывают сигналу способность к передаче бесконечной информации и, таким образом, допускают как факт бесконечную энергию для её передачи. На деле, в реальной практике передачи сообщений, это условие, разумеется, не будет выполняться. Поэтому здесь, как и в случае с электромагнитным излучением, принимают аксиому о «конечности энергии», которая является индуктивным выводом из фактов «земной среды»⁴³.

Процесс согласования интервальной ситуации и гносеологической картины мира, которую она позволяет получить, аналогичен процессу фокусировки при восприятии. На перцептивном уровне у нас нередко возникает необходимость в «наведении на резкость» с целью получения отчётливого изображения. Так, когда я хочу поточнее разглядеть весьма малый предмет, я обычно пользуюсь лупой, которая даёт мне прямое увеличенное изображение предмета, если только мой глаз и предмет «правильно расположены» относительно главных фокусов линзы. При нарушении этого условия я перестаю различать что-либо или вижу некий парадоксальный образ. Но невозможность увидеть желаемое в данном случае вполне согласована с законами оптики. Если бы я сказал при этом, что лупа сконструирована неправильно, это восприняли бы только как шутку. Отсутствие желаемой картины вполне строго вытекает из законов оптики, и при данном рассмотрении образ оказывается именно таким, каким он должен быть по законам оптики, так что в этом смысле «парадоксальный образ» является совершенно верной картиной физического факта.

Таким образом, *фокусировка* выступает как процедура согласования объективного и субъективного в рамках определённой интервальной ситуации. В свою очередь, интервальная ситуация, даже будучи чисто эмпирической, играет роль объективной основы для абстрагирования, являясь, по существу, ситуацией гносеологической, согласованной с познавательными возможностями субъекта. И это не зависит от того, будет ли интервальная ситуация данной а priori, как, например, данная нам Вселенная, или это будет интервальная ситуация, подбираемая исследователем сознательно с целью идентификации определённого рода явлений, то есть с таким расчётом, чтобы она

могла стать источником неискажённой помехами информации. При этом интервальная ситуация может быть даже воображаемой, как, например, Флатландия, или Сферландия⁴⁴, или вселенная Пуанкаре.

Известно, что научные теории в первую очередь имеют в виду определённые изменения своих объектов и изучают их свойства, инвариантные относительно этих изменений. Правда, в поле зрения они, конечно, держат и некоторые неинвариантные свойства, вспомогательные при изучении инвариантных свойств. Так, в классической механике главным объектом рассмотрения являются свойства физических тел, инвариантные относительно галилеевских преобразований, сохраняющиеся во всех инерциальных системах отсчёта и потому названные (не совсем справедливо) абсолютными свойствами. Аналогично и в элементарной геометрии абсолютным свойством пар точек является расстояние, поскольку оно не зависит от выбора системы координат, то есть сохраняется при любых движениях плоскости или пространства. Но отыскать действительные инварианты в рамках той или иной теории можно лишь при сравнении по меньшей мере двух интервальных ситуаций. Скорость света — физический инвариант, но это было не очевидно в свете галилеевских преобразований, а в качестве основы для измерений тогда отстаивали одну (абсолютную) интервальную ситуацию. В действительности только пара гносеологически сопряжённых ситуаций позволяет разделить понятия теории на те, что имеют внеинтервальный (абсолютный) смысл и на те, что имеют только интервальный (относительный) смысл. Например, скорость движущейся точки и её траектория зависят от выбора системы отсчёта и потому имеют *относительный смысл*, а ускорение той же точки не зависит от этого выбора и потому имеет *абсолютный смысл*. Если же возможность сравнения ситуаций исключить, то отпадает *fundamentum divisionis* такой классификации. Например, когда говорят, что «не существует траектории самой по себе, но всякая траектория относится к определённому телу отсчёта»⁴⁵, понятие траектории относят к двум различным инерциальным системам отсчёта. Иначе говоря, его относят к интервальным ситуациям «внутри» и «снаружи». При этом понятие естественно приобретает относительный смысл, а вопрос «как же на самом деле?» лишается смысла. Однако, если возможность сравнения инерциальных систем отсчёта была бы принципиально исключена, понятие траектории приобрело бы абсолютный смысл, то есть стало бы траекторией «на самом деле».

Аналогичным образом и в логике понятие тождества, определённое через условие подстановочности в классе всех предикатов конкретной аксиоматической системы, при возможности сравнения

различных систем имеет относительный смысл, а взятое «само по себе» (как понятие), безотносительно к сравнению каких-либо определённых классов предикатов, оно имеет абсолютный (чисто логический) смысл⁴⁶.

1.3. Интервальная ситуация и проблема истины

Ещё античные философы заметили, что философия начинается с проблемы противоречия между тем, «что и как» нам кажется, и тем, «что и как» имеет место на самом деле. Иными словами, философия начинается с нахождения некой мерки для истины. Но, так же как процесс измерения заканчивается субъективным образом измеряемой величины, так и процесс познания вообще заканчивается субъективным образом *действительности в интервале абстракции*. Абстрагирующая деятельность мышления является исходным звеном в цепи любого научного (да и повседневного) исследования, любого когнитивного процесса, а каждый такой процесс привязан к той или иной интервальной ситуации. И если не существует универсальной интервальной ситуации, то не существует и универсального ответа на вопрос «что есть истина?». Но универсальной интервальной ситуации, по-видимому, не существует.

Такой вывод можно считать эмпирической гипотезой. Однако у этой гипотезы есть некоторое логическое основание в виде неразрешимости универсальной проблемы разрешения (относительно истины).

Положим, что мы хотим решить такую задачу: по любому данному суждению определить, истинно оно или ложно. Это проблема разрешения относительно истинности, поставленная во всей её полноте (как универсальная проблема). Понятно, что для решения этой проблемы нам потребуется сначала ответить на предыдущий вопрос об истинности применительно к суждениям. Известный философский ответ на этот вопрос, когда истина определяется как соответствие мысли действительному положению дел, восходит ещё к Аристотелю. Но этот ответ приводит к коллизиям, которые трудно преодолеть. Я имею в виду не только общую неясность понятия соответствия, которое используется в определении, но и семантические парадоксы, связанные как раз с этим классическим определением понятия истины. Узаконить эти парадоксы, конечно, нельзя в силу их формального характера.

Можно попробовать обойти возникающие здесь трудности, если вместо универсальной проблемы разрешения относительно истинности рассмотреть универсальную проблему разрешения относительно выводимости. По существу, это уже некоторая релятивизация истинности, когда оценки «истинно» или «ложно» связываются не с самими суждениями, а с их отношением друг к другу как основания

(гипотеза, постулат, аксиома) к следствию. Универсальная проблема разрешения относительно логического следования сводится тогда к следующему: взяв любое суждение *A*, построить по нему такое суждение *B*, которое говорит о выводимости *A* из *B*. Положив, что *B* это $B \Rightarrow A$, из допущения, что такое *B* существует, выведем $B \Rightarrow A$. Но тогда, поскольку доказано *B*, то доказано и *A*, причём доказано без всяких допущений. Это парадокс Карри. В этом случае, при универсальном толковании глагола «следует», разрешимость универсальной проблемы разрешения относительно выводимости (если бы она была возможна) означала бы выводимость любого суждения, что возвращало бы нас к противоречивой ситуации, аналогичной семантическим парадоксам. А это приводит к необходимости вообще отказаться от постановки универсальной проблемы разрешения (относительно истины или выводимости) или, хотя бы до выяснения ситуации, не стремиться её решать. Но «выяснение ситуации» — это не что иное, как переход к понятию истинности в определённой интервальной ситуации и, таким образом, интервальное ограничение (релятивизация) проблемы.

Однако, настаивая на этом ограничении, мы не воспринимаем его как отрицание проблемы. Это просто отрицание истины как «отражения абсолютно целого», по Владимиру Соловьёву, который (возможно, вслед за гегелевской диалектикой) утверждал, что если что-то познанное берётся отдельно «от всего», то оно «вне истины». А теоретическое знание именно таково, а потому теоретическое «сознание истины» — это «только внешнее освещение, отблеск чужого света»⁴⁷.

Интервальный подход, напротив, преобразует классическую максиму Спинозы в интервальную максиму *determinatio est affirmatio*, полагая, что только в интервальной ситуации абстракция приобретает не гипотетический, а *абсолютный смысл*, согласованный с прочно установленными фактами. И поскольку это так, абстракция остаётся значимой (незыблемо установленной), несмотря на любые изменения научных представлений о собственных основах, которые могут происходить со временем⁴⁸. Разумеется, это относится не к любым абстракциям. Но математические абстракции (законы математической физики, например), во всяком случае, таковы.

Интервальный подход опирается на это обстоятельство как на *ultima ratio* философских представлений об истинности научных теорий. И в этом своём убеждении интервальный подход, конечно, не одинок. Вот три характерных цитаты из текстов, написанных в разное время разными людьми, но выражающих, в сущности, одну интервальную идею, высказанную выше:

«Наука есть транспонировка фактов, производимая с точностью до стольких-то процентов. Некоторая форма, удовлетворяющая ряду данных фактов с известным данным приближением, будет и впредь удовлетворять с тем же приближением тем же фактам, каковы бы ни были позднейшие открытия. В этих именно пределах принципы и находятся во власти будущего»⁴⁹.

«Все законы природы, установленные при определённых условиях, установлены окончательно. Дальнейшее развитие науки, во-первых, обобщает эти законы на новые условия, а во-вторых, устанавливает новые, ограничивающие их применимость условия»⁵⁰.

«Всякий раз, когда с определённой точностью подтверждается определённый закон... можно утверждать, что этот результат в основном является окончательным и никакие последующие теории его не смогут опровергнуть»⁵¹.

ГЛАВА 2. АБСТРАКЦИЯ И НАУЧНЫЙ МЕТОД

Мне мило отвлечённое:
Им жизнь я создаю...

*Зинаида Гиппиус,
«Надпись на книге»*

Когда какой-либо термин из обыденной лексики переходит в научную, значение этого термина обычно уточняется и, даже переопределяется. В повседневном обиходе крайне редко требуется такая осторожность выражений, которая превращала бы само «слововыражение» в проблему. Между тем наука особенно нуждается в таких превращениях. Но превратить значение слова в проблему — значит однажды не поверить в это значение или же усомниться в нем, как это сделал, например, Альберт Эйнштейн, усомнившись в ясности обыденного и классического значения слова «одновременность».

Потребность в семантическом уточнении или же «расщеплении» значений — это естественное следствие растущей концептуализации научного опыта, обусловленной его разнообразием и определенным «ростом различимостей» в мире этого опыта⁵². Именно рост различимостей приводит к необходимой понятийной детализации научной терминологии, причем до поры до времени такая детализация идет как бы исподволь и целиком в сфере понятийного, а не языкового материала — и новые и старые значения актуализируются обычно в одном термине.

Так или почти так обстоит дело и с термином «абстракция». Дифференциация его понятийных значений подразумевается давно. Но необходим еще логический анализ этих подразумеваемых значений. Тогда тема абстракции, возможно, представит больший интерес для методологов науки. Пока же, как известно, эта тема непопулярна.

2.1. Странички истории

Возможно, что первым, кто стал рассматривать абстракцию как научный метод анализа явлений (в отличие от абстрактного как духовного начала, или идей Платона), был Аристотель. Он считал, что посредством абстракции можно наилучшим образом вести исследование, а мысленное разделение целого, свойственное абстракции, хотя и создает феномен нереальности результата, объективно все же оправдано многообразием свойств целого и относительной их независимостью друг от друга. И поскольку обо всем можно говорить в нескольких разных аспектах рассмотрения, порою даже столь разных, что они вообще не могут стать предметом одной науки, абстракция, по Аристотелю, не является произволом нашего мышления, не насилует природу, ведь «если, полагая что-то обособленно от входящих свойств, рассматривают его, поскольку оно таково, то не получится никакой ошибки»⁵³.

Хотя Аристотель не принял платонизм, в вопросе объективности абстракций Аристотель был осторожнее номиналистов. Он вполне допускал, что об абстрактном тоже можно говорить как о существе⁵⁴. Ведь иначе и научное познание, которое всегда есть познание общего и абстрактного, лишилось бы смысла. Поэтому абстракции не только представляют собой основную предпосылку научного познания, но и «создают науку». В науке мы стремимся давать определения и доказывать, поскольку убеждены, что и то и другое выражает некую необходимость. А в отдельных единичных вещах, хотя они и представляют собой действительно сущее, необходимости нет. Поэтому преходящие объекты опыта важны для науки не сами по себе, а в той мере, в какой они причастны к какой-нибудь абстракции. Например, в физике — к движению, в математике — к числу или пространству.

У Аристотеля можно найти намек и на классификацию абстракций. Точнее, на то, что в наше время выработалось в форму различения эмпирических (феноменологических) и теоретических законов науки. По крайней мере, Аристотель отделял математическую (теоретическую) абстракцию от эмпирической. Например, движение он считал эмпирической абстракцией, а основные понятия арифметики и геометрии — теоретическими абстракциями. Он вполне понимал, что теоретические абстракции необходимы там, где постигаемое мыслью и сама мысль неотличимы друг от друга. А именно так обстоит дело в математике, где, по мнению Аристотеля, знание и предмет знания, по существу, совпадают, так как предметом знания здесь являются логические формулировки самих абстракций.

Аристотелевская теория абстракций — это, по-видимому, самое значительное из того, что оставила нам ранняя античность на эту тему. Схоластика, включая арабоязычный неоплатонизм, свела тему абстракции к теме универсалий, связав её с понятием *arche*, что соответствовало философской мысли, ориентированной на *logos*, но не на *physis*. Правда, она отчасти рафинировала проблему абстракции учением о континууме и бесконечности, но только в онтологическом аспекте, устранив в какой-то мере гносеологическую направленность аристотелевской теории. А когда на смену средневековой «книжной науке» пришла опытная наука нового времени, тема абстракции, казалось, вовсе сошла на нет. И Бэкон, и Декарт, и Лейбниц — все говорили о методе, и почти никто об абстракции. Разве что попутно в связи с образованием общих понятий, сопровождающая сказанное уничижительным «лишь абстракция», то есть то, что не имеет объективной достоверности, или попросту не существует. Правда, Локка нередко называют родоначальником современной теории абстракции. Но и он не пользовался термином «абстракция», предпочитая говорить об общих идеях.

В итоге онтологический и гносеологический взгляд на абстракцию сменился психологическим: абстракция представлялась теперь просто вынужденным «действием души» по выработке общих понятий, необходимость в которых обусловлена несовершенством рассудка, неприспособленного познавать иначе естественную (и нераздельную) «природу вещей». И сенсуализм и рационализм 17-18 вв. были почти единодушны в том, что «опредмечивание» (онтологизирование) абстракций не только заслоняет от глаз исследователя особенности реальных явлений, но и приводит к гипостазированию фиктивных сущностей и бессодержательных представлений. Известным выражением этой позиции явилось кантовское требование «*сделать чувственным* (*sinnlich*) всякое абстрактное понятие, т. е. показать соответствующий ему объект в созерцании, так как без этого понятие... было бы *бессмысленным* (*ohne Sinn*), т.е. лишённым значения»⁵⁵.

В целом в эту эпоху тема абстракции надолго уступила место теме наблюдения, индукции, эксперимента и т. п., то есть изучению всех тех условий, которые стали определять с тех пор понятие рационального научного метода как продуктивного пути в исследовании и познании природы.

Ещё философ Евдем, друг и ученик Аристотеля, определил путь познания как переход от чувственного восприятия к мысленному созерцанию и от последнего — к разумному знанию. В этом примечательном определении как будто узнаётся современный нам взгляд

на диалектический путь познания. Однако стоит перевести евдемовскую мысль в наглядный образ ее логической модели⁵⁶, как тотчас же обнаруживается разница. На пути познания, начертанном античной мыслью, предполагалась окончательная остановка: лишь только знание достигается, путь познания обрывается. Историческая экстраполяция этой модели почти очевидна. Идея законченности космологических принципов присуща и сознанию античности, и сознанию эпохи раннего и позднего средневековья. Только у мыслителей эпохи Возрождения мы находим принципиально новый методологический шаг: от асимметричного отношения «опыт—теория» к композиции отношений «опыт — теория» и «теория—опыт», сообщая познанию, таким образом, некоторый вид развития. Это, конечно, был ещё первый шаг навстречу экспериментальной проверке, навстречу опыту как методу. Но вскоре за этим первым шагом последовал и второй — родился гипотетико-дедуктивный метод Коперника — Галилея.

С тех пор гипотетико-дедуктивный метод становится нормой в рабочей мастерской исследователя. Однако на характер философской позиции, на методологическую рефлексию исследователей это, по видимому, почти не влияет. Опыт и основанная на опыте аргументация вместо абстракций — вот духовная установка, определявшая эту позицию и эту рефлексию едва ли не до конца прошлого столетия. Правда, «дух гипотез», как выразился Д.-Ф. Араго, какое-то время ещё царил в рационалистических школах Декарта и Лейбница, и в этом же духе выдержано первое издание ньютоновских «Начал» (1687). Но после его «Правил философствования» (1713), после его «*hypotheses non fingo*», эмпиризм стал одерживать верх. Сам Ньютон не был, конечно, эмпириком. Но своей приверженностью к эмпирической индукции как высочайшей инстанции в оценке физических принципов он немало содействовал распространению эмпиризма. «Мне кажется, — писал Ньютон, — что наилучший и самый верный метод в философии — сначала тщательно исследовать свойства вещей и установить эти свойства опытами и затем уже постепенно переходить к гипотезам для объяснения их. Ибо гипотезы полезны только для объяснения свойств вещей, а не для определения их, по крайней мере, поскольку свойства могут быть установлены опытами»⁵⁷.

Многим тогда казалось, что абстракции, безусловно полезные для классификации знаний, непригодны для их приращения. И уж тем более не годятся в качестве первых принципов познания, если они имеют вид априорных гипотез, а не опытных истин. Беззаветная вера в индукцию, в наблюдение и эксперимент, в полученные на их основе

факты и общие положения, индуцированные из этих фактов, вытеснила из философского сознания античную идею дедукции фактов из абстрактных принципов⁵⁸.

В то же время экспансия сенсуализма с его стремлением сочетать «максимум эмпирии с минимумом теории» сделала какую-либо научную теорию абстракций и вовсе излишней: «всякая абстрактная идея должна быть объяснена другой, менее абстрактной, и так следует поступать последовательно до тех пор, пока мы не придем к некоторой частной и чувственной (*sensible*) идее»⁵⁹. В этом программном заявлении эпохи первых промышленных революций отчетливо звучит мотив семиотической доктрины грядущего позитивизма. Но это пока не борьба с метафизикой, а борьба самой метафизики против схоластики.

Существенно, что рационализм и эмпиризм этого периода, взяв психологический курс в трактовке абстракции, видели в ней всего лишь «отрицательное условие образования общезначимых представлений»⁶⁰. И философия начала 19 в. существенно не изменила этой оценки. В частности, Гегель, признавая абстракцию как первый (исходный) элемент духовного освоения реальности и включая абстракцию в обыденный и научный опыт (уже простое наблюдение нуждается в способности к абстракции), в то же время причислял абстракцию к «формальной мысли», чуждой философскому методу, и порицал абстрактное за односторонность и пустоту. В субъективном акте абстрагирования Гегель видит противопоставление всеобщего единичному, выставляя единичное как нечто «презираемое абстракцией», так что именно в силу этого противопоставления абстракция не может постичь подлинную (живую) реальность и «приходит лишь к безжизненным и бездуховным, бесцветным и бессодержательным всеобщностям»⁶¹. Замечу, однако, что для Гегеля абстрактность и всеобщность не совпадают, они различаются, как средство и цель. Общность, к которой приводит абстракция (путём отвлечения), имеет сугобо отрицательный смысл. Напротив, подлинная (конкретная) общность возникает на пути, обратном абстракции, за счёт синтеза абстрактных определений. Сначала анализируем и *обобщаем абстрактно*, затем синтезируем и *обобщаем конкретно*. Последний путь и есть пресловутое «восхождение от абстрактного к конкретному».

Справедливости ради замечу, что психологическая трактовка абстракции не удовлетворяла Гегеля. И хотя он исходит из постулата о тождестве мышления и бытия, он против упрощённого толкования абстракции, согласно которому абстракция «только отражает в форме мысли то содержание, которое уже заключается в вещах»⁶². При

этом Гегель высказывает важную мысль о «собственном содержании» абстракций как темы, образующей основу для выполнения, которая, между прочим, и составляет «живой дух действительности».

Энтузиазм, с каким иные философские школы различных направлений умалили абстракцию как форму и метод познания природы, был пропорционален пафосу их натурфилософских амбиций. Только к середине 19 в. признание гносеологической значимости абстракции выходит за пределы её понимания как «отвлечённой мысли», распространяясь на методы объяснения явлений природы и общественной жизни. Причём посредством абстракции анализируется и объясняется не только статика, но и динамика явлений. В гуманитарной области это относится в первую очередь к философскому анализу К. Маркса, в котором объективная диалектика развития осознаётся через развитие субъективной диалектики понятий, и поэтому принцип абстракции играет в ней ведущую роль. Но и в естественно-научной методологии тех лет, в сущности далёкой от сознательной диалектики, применение абстрактных моделей «достигает поразительных результатов в объяснении явлений природы»⁶³. В результате и в научной методологии духовная установка послесхоластической реформации («вместо абстракций — опыт») постепенно заменяется компромиссом, когда абстракции признаются как выражения реальных взаимодействий эмпирических (конкретных) объектов. Даже позитивизм (в форме эпистемологического скептицизма) в известной мере принял этот компромисс, отводя абстракции не только руководящую роль в научном исследовании (как методу «логической схематизации»), но и признавая за ней некоторый «род реальности»⁶⁴. Тогда же появилась и первая терминология по классификации абстракций: *изолирующая* и *обобщающая* абстракции, истолкованные в манере номинализма, — вот главное наследие этого периода.

Лишь в конце прошлого и в начале нынешнего века в адрес традиционной, по существу локковской (психологической), концепции абстракции прозвучали критические голоса⁶⁵. Традиционная концепция абстракции была признана недостаточной для объяснения образования научных понятий прежде всего потому, что она усматривала ключ к логическому содержанию любой формы понятия в психологическом акте отвлечения. Последовательное проведение такой точки зрения воздвигало «пирамиду понятий», которая вела в пустоту. Основываясь на несходстве способов образования понятий в математике и в естественных науках, критикой был поставлен вопрос, всегда ли математические понятия, даже непосредственно близ-

кие нашей интуиции, можно представить как результат изолирующей или же обобщающей абстракции? К примеру, абстрагируем ли мы в традиционном локковском смысле, когда определяем прямую как функцию $y = x + k$? Выражаясь более общо, можно вопрос поставить так: является ли психологический (и эмпирический) подход к процессу абстракции универсальным или же он недостаточен и существенно ограничен в сфере математического творчества?

Вот как отвечал на этот вопрос Кассирер: «Понятие о точке, о линии, о поверхности невозможно рассматривать как непосредственный *частичный состав* данного налицо физического тела, и их нельзя поэтому извлечь из него путём простой «абстракции»... Голой «абстракции» здесь противостоит своеобразный акт мышления, свободное творчество определённых связей отношения... Учение об абстракции теряет здесь или своё всеобщее значение, или свойственный ей с самого начала специфический логический характер»⁶⁶.

Видеть «специфический логический» характер абстракции в субъективном акте отвлечения — это, конечно, дань традиции. Но поскольку иного, по определению, не дано, Кассирер в приведённом отрывке, чтобы предусмотреть возможность «свободного творчества», намечает переход от проблемы абстракции к проблеме *идеализации*, которая была поставлена ещё Феликсом Клейном в его «Эрлангенской программе» (1872). Оценивая абстракцию только как психологический акт отвлечения, слишком связанный с чувственным содержанием опыта, Клейн ставил идеализацию выше абстракции в творческом плане, усматривая её суть в логической обработке факта, в его преобразовании в доведённый до совершенства теоретический рафинированный образ. «В этом «идеализировании» эмпирических данных, — писал Клейн, — лежит истинная сущность аксиом. Наше прибавление к эмпирическим данным ограничено при этом в своём произволе тем, что оно должно приспособляться к фактам опыта и, с другой стороны, не может вводить никаких логических противоречий»⁶⁷.

При такой постановке вопроса решающим фактором возрождения интереса к теме абстракции явилась, конечно, канторовская теория множеств с сопутствующим ей утверждением, что «суть математики в её свободе». Постулируя множество в качестве реальной сущности, Г. Кантор предложил отличать интуитивно ясный эмпирический факт наличия многих вещей — множественности их — от множества как единой вещи, которая уже не является эмпирическим фактом и, вообще говоря, не может быть проиллюстрирована на примере⁶⁸. Чисто логический переход от множественности вещей к

множеству их как «абстрактной вещи» с тех пор является важнейшим априорным принципом теории абстрактных множеств, лишь очень немногое почерпнувшей из мира эмпирических истин. Можно сказать, что кризис оснований математики имел философскую подоплеку и развился из недоверия к объективному смыслу трансфинитных абстракций, породивших определённое «чувство беспокорности относительно зависимости чистой логики и математики от онтологии платонизма»⁶⁹. Именно с критики трансфинитных принципов начинается глубокая дифференциация методологических подходов по типу применяемых абстракций (эффективизм, интуиционизм, логицизм, формализм и др.), стремящихся преодолеть кризис оснований не только техническими средствами усовершенствования математических теорий, но также тем или иным решением гносеологических проблем абстракции. В частности, это нашло отражение в неоднократном обсуждении ординалов с точки зрения эмпирических (финитных) принципов, начиная с эффективистской модели, основанной на теореме о росте функций, и кончая рекурсивным анализом.

2.2. О значениях слова «абстракция»

Обычно первые — «наивные» — понятия науки живут в нашем сознании в виде несовершенных и туманных образов. Только со временем — да и то не всегда — они могут приобретать логически приемлемую форму. Случается, правда, что научную теорию нельзя построить без предварительного точного определения основных (первых) понятий этой теории, когда, как говорил Фейербах, смысл продвижения вперёд — в определении⁷⁰. Но, вообще говоря, это не правило. Известная туманность необходимого нам концептуального материала далеко не всегда препятствует созданию с его помощью хорошей научной теории. Исторически так создавались неформальная арифметика и элементарная геометрия, классическая физика и математический анализ и, наконец, упомянутая выше наивная теория множеств.

Замечание Н. Бурбаки о том, что начиная с античности понятия «математика» и «доказательство» по значению, по существу, совпадали, интересно, в частности, тем, что интуитивное понятие доказательства «во всей его полноте» всегда оставалось достаточно неопределённым⁷¹.

Между тем именно изучение понятий во всей их полноте «часто оказывается чрезвычайно ценным для развития пауки»⁷². Но такое изучение не может быть догматичным, оно дается расщеплением, релятивизацией смысла. И формальная аксиоматика, какой бы абсолютной ни казалась нам её роль, является одним из средств релятивизации понятий. Полиморфизм аксиоматик — это не только след-

ствии положительного стремления к точности, но и обратная сторона той отрицательности, которая заведомо заключена в этом стремлении, поскольку «уточнение смысла происходит за счёт отбрасывания потенциальных возможностей, заключённых в интуитивном образе»⁷³. К примеру, никакая формальная схема математической индукции для системы аксиом арифметики натуральных чисел (для системы Пеано) не может исчерпать всей силы интуитивного содержания математической индукции «в том смысле, что нельзя посредством такой схемы обеспечить, что единственной (с точностью до изоморфизма) моделью её аксиом будет множество натуральных чисел»⁷⁴. В целом система аксиом Пеано однозначно определяет только тот факт, что универсум любой её *индукционной модели* (Л.Генкин) должен быть не более чем счётным.

Итак, каждая данная аксиоматика ограничивает свободу «обращения» понятий в их неограниченной интуитивной общности, а кроме того — и свободу экстраполяции понятий за пределы соответствующего класса моделей⁷⁵. Не случайно аксиоматический метод представляют как метод неявных определений — *determinatio negatio est*.

Правда полагая, что система аксиом является совместным определением «каких-то понятий», вопрос каких именно часто оставляют открытым. Однако *факт существования* таких понятий (абстрактных объектов) вовсе не безразличен. Мы доказываем непротиворечивость системы аксиом, поскольку понимаем, что противоречивая система не имеет моделей и в этом смысле вообще никаких понятий не определяет.

Не лишнее отметить, что традиционная приверженность к аксиоматике — это, помимо прочего, и спасительный компромисс между интуицией и дедукцией, закрепивший привычку работать с классами понятий, вообще не допускающих абсолютных определений. Дедукция возвышает нас до понимания единства и связей с некоторой точки зрения, но можно ли разглядеть новое в науке, если пренебречь интуицией?⁷⁶

Этот долгий разговор о неявном определении понятий я затеял с одной только целью: перейти к обсуждению понятия «абстракция». Конечно, когда мы говорим об абстракции, мы вряд ли ожидаем каких-либо открытий в этой области. Слишком уж эта область испытана. Но каждое слово, говорил Геррит Маннури, однажды рожденное или сказанное, входит в мир как живая мистерия человеческой реальности — мысли, воли или действия людей, и главная проблема философии языка — это выяснение и отделение субъек-

тивной ценности свободно изречённой мысли от её объективного значения (как утверждения факта)⁷⁷. В этом залог развития языка и развития понятий.

Но для такого развития подразумеваемое и неизреченное бывает нередко важнее высказанного, важнее точных определений. Вот почему, обращаясь к семантике слова «абстракция», я вовсе не претендую на полноту возможных здесь толкований. Я не претендую и на какое-либо «единственно правильное» понимание абстракции, на то, чтобы выявить некий «истинный смысл» того, что обычно называют абстракцией. Ведь я отношусь к абстракции как к философской категории. А уже логики Пор-Рояля полагали, что любую систему категорий полезнее всего рассматривать как произвольно установленную систему понятий, которая, в зависимости от философской установки, с одинаковым правом может быть заменена какой-либо иной системой понятий.

И всё же главное, на чём основывается интервальная установка, — это смысловое содержание понятия «абстракция». По замыслу этой установки, оно значительно шире, чем то, что индуцировано буквальным переводом с латинского. В сущности, мы следуем здесь завету Уайтхеда: каждому философскому понятию «придавать самое широкое значение, какое оно только способно иметь. Только так можно установить подлинную ценность идей»⁷⁸. А ценность абстракции (с интервальной точки зрения), в частности, в том, что именно ей мы обязаны нашей способностью мышления. Абстрактны все когнитивные («вторичные») образы знания — от перцептивных (восприятия, представления и пр.) до концептуальных (понятия, суждения, теории и пр.). В этом смысле **абстракция универсальна**.

Поскольку наука всецело связана с абстрактным мышлением, она, полагал Гегель, исключает возможность воображения. Много позже Гильберт, когда один из его учеников оставил математику ради поэзии, заметил, что для математики последнему не хватило воображения. А ещё позднее основатель российского конструктивизма Марков полагал, что фантазировать в науке — это привлекать те или иные абстракции⁷⁹. Тут абстракция толковалась уже широко, включая и процесс идеализации.

Конечно, мы вправе задать вопрос, способна и должна ли абстракция служить положительному приращению знания? Очевидно, что, ограничивая абстрактное отвлечённым, мы вряд ли можем рассчитывать на какое-либо положительное приращение. В актах «чистого отвлечения» абстракция представляет собой информационный процесс в собственном смысле — процесс ограничения разнообразия. Однако этот

процесс только предворяет мысленный анализ возможных отношений между абстрактным образом (абстрактным объектом) и его (возможно наглядным) источником, а не завершает его. Упрощённый образ, лишённый «побочных черт» и «массы подробностей», соответствует научным задачам лишь до известного момента, пока обеспечивается возможность видеть «всё», от чего абстрагируют. Дальнейшая работа абстракции нередко требует дискредитации наглядных образов, созданных актами чистого отвлечения, переходов к собственно мыслимым образам реальности. И тут аргумент от языковой нормы вполне уместен. Но различать абстракцию и отвлечение — это не просто делать ход в «языковой игре». Такое различение имеет далеко идущее гносеологическое продолжение.

Синтаксическая сочетаемость русского глагола «абстрагировать» выражается, как известно, в двух формах этого глагола: переходной — абстрагировать что-то, и непереходной — абстрагировать (абстрагироваться) от чего-то⁸⁰. Их позиции в языке равноправны, но семантические задачи неодинаковы. Переходная форма выражает направленность внимания на то, что абстрагируется. Непереходная форма, напротив, — на то, от чего абстрагируются. Два этих разных умственных акта отвечают двум разным аспектам познавательного процесса. От того, какой аспект мы в данный момент выбираем, зависит контекстная реализация синтактико-семантической позиции при слове «абстрагировать»⁸¹. Похоже, что, создавая абстрактные объекты науки, мы апеллируем к первой форме чаще, чем ко второй, которая имеет неприятный привкус отрицания. Но, вообще говоря, это только кажущееся разделение интереса в интеллектуальной «игре в абстракцию», поскольку обе формы дополняют друг друга.

Семантическую задачу переходной формы я называю положительной, а семантическую задачу непереходной формы — отрицательной. Деление это, конечно, условно и относительно, как условно и относительно деление вещественной прямой на положительное и отрицательное направления. Однако сами задачи нередко абсолютизируют. И тогда естественно поляризуется ценностное отношение к абстракции. Те, кто имеет в виду положительную задачу, говорят о научном предназначении абстракции отражать «существо дела», законы явлений, объективные «формы и ритмы». Те же, кто имеет в виду отрицательную задачу, указывают на односторонность и бедность абстракции, на ее субъективность, на то, что абстрактность — это «изолированный, неполный момент понятия, в которой нет истины»⁸². Примеров такого полярного отношения к абстракции в истории науки немало.

Аристотель, как уже отмечалось, основную ценность абстракции усматривал в разрешении её положительной задачи. Он считал, что приемлемый уровень научного понимания связан с выработкой абстракций, дающих нам модели объяснения и обобщения фактов. Ведь опыт — это всегда регулярность, повторение одного и того же, а осознание «одного и того же», по мнению Аристотеля, — это необходимый шаг к обобщению и абстракции.

Кант, в отличие от Аристотеля, главной считал отрицательную задачу абстракции. Кант возражал против языковой практики употребления глагола «абстрагировать» в переходной форме. «Мы не должны говорить: абстрагировать нечто (*abstrahere aliquid*), но: абстрагировать от чего-либо (*abstrahere ab aliquo*)»⁸³. Этот протест против сложившейся языковой нормы кажется странным, но он легко объясним номиналистической установкой Канта на «исключение абстракций». Абстрактное, по Канту, атрибутивно, но не сущностно. Поэтому абстрактное не выделяется само по себе как субъект, как *ens reale*, как онтологическая сущность, а только мыслится как предикат, как *ens rationis*, как нечто неотделимое от того, что в действительности является сущностью. Отсюда и взгляд на абстракцию как на отрицательное условие познания: «Понятие, — говорил Кант, — осуществляется не благодаря абстракции; абстракция лишь завершает его и заключает в определенные границы»⁸⁴. Общность понятия — это лишь косвенное дело абстракции, поскольку она помогает отвлекаться от того, что не входит в наше намерение, и исключать различное в сходном и тождественном.

Рассмотренные примеры типичны, и я не стану приводить других. Но как бы ни складывалось отношение к абстракции в той или иной теории познания, привычка выделять в абстракции ее отрицательный, элиминативный аспект всегда преобладала в ее словарных определениях. И объяснение этому, пожалуй, простое — в лексическом поле нашего языка слова «абстракция» и «отвлечение» традиционно живут как равноправные стилистические варианты, как слова-синонимы.

Между тем давно известно, что лексическая сочетаемость слов «абстракция» и «отвлечение» не одинакова, что и сами эти слова, и соответствующие им глаголы, вообще говоря, не подстановочны, а следовательно, и не тождественны⁸⁵. И если к особенностям этой синонимии подходить серьезно, учитывая фразеологические варианты значений в реальных условиях речи, в актах языкового действия, когда слова обретают их истинную смысловую ценность, отклоняющуюся, как правило, от свободной словарной нормы, а также — все

гда возможные терминологические переносы, порождающие еще новые группы значений, то следовало бы, пожалуй, говорить здесь только о контекстуальной синонимии или, быть может, лишь о частичном совпадении синонимических рядов значений, связанных с каждым из этих терминов. Так, в частности, абстракция как результат процесса абстрагирования — это очевидный метонимический перенос с новым значением. Причем субстантивация значения имеет здесь существенные методологические последствия: в зависимости от сферы приложения результаты процесса абстракции (абстрагирования) могут быть очень разными объектами — от чувственных образов, данных в опыте, до идеальных образов науки.

2.3. Абстрактный объект

Чтобы понять, что такое абстрактный объект, нет необходимости взбираться на верхние этажи познания. Абстрактным называют любой объект, созданный какой-либо абстракцией или при посредстве какой-либо абстракции. При этом результат абстракции мыслится как нечто самосушее (abstract entity), как отдельная реалья в системе определённых представлений. К примеру, в системе представлений о письменности русского языка каждая буква алфавита мыслится как абстрактный объект — как «абстрактная буква», в отличие от оттиска такой буквы на странице (данного) текста — её «конкретного» (материального) представителя, манифестации абстрактного объекта в письменной речи. В устной речи её конкретным представителем служит определённый фонетический звук. Аналогичным образом слова из словариков энциклопедий — это абстрактные слова. Их имеют в виду, когда энциклопедии составляют и готовят к изданию. Но когда энциклопедии печатают в типографии, то имеют в виду уже конкретных представителей абстрактных слов.

Различение букв на конкретные и абстрактные вовсе не произвольно. Оно отражает реальные черты языковой практики. Так, буквы, которые пишут или печатают, согласно заранее установленным образцам — прописям или шрифтам, — это конкретные буквы. Но именно абстрактные буквы имеют в виду, когда пишут или печатают конкретные буквы. Чтобы напечатать слово «логика» требуется шесть конкретных букв (в типографской технике прошлых лет — шесть типографских литер) и столько же абстрактных букв надо при этом иметь в виду. А чтобы напечатать слово «философия» требуется девять конкретных букв (девять типографских литер), однако только шесть абстрактных букв надо при этом иметь в виду. Поэтому,

набирая слово «логика» (тем способом, которым печатали книги в недалёком прошлом), наборщик должен был брать по одной литере из шести ячеек наборной кассы. Из стольких же ячеек он должен был взять литеры, набирая слово «философия», но при этом из трёх ячеек он возьмёт более чем одну (в точности две) литеру. Последнее указывает на многократное появление в слове «одной и той же» абстрактной буквы или, соответственно, на наличие в этом слове нескольких её представителей.

В полном согласии с указанным фактом под абстрактной буквой мы можем разуместь либо весь класс её представителей (одинаковых между собой конкретных букв, например, всё содержимое соответствующей ячейки наборной кассы), либо произвольную конкретную букву, семантика которой определяется исключительно её ролью в качестве представителя (её местом в наборной кассе), либо, наконец, понятие о такой букве. Только в последнем случае абстрактная буква будет мысленной сущностью (*ens rationis*), мысленным образом, который руководит нашим поведением (наприер, при изучении алфавита) в мире конкретных букв, не являясь сам элементом онтологии (*ens reale*). В первом и во втором случаях, напротив, мы восходим на определённую ступень абстракции и в онтологии, а именно: мы переходим к абстрактным сущностям как онтологической (объективной) реальности.

В принципе не исключается, что один и тот же абстрактный объект может иметь представителей, которые сами являются абстрактными объектами. В теоретическом познании последнее не редкость. В частности, в лингвистике представителями абстрактных букв служат соответствующие звуковые типы — фонемы, тоже абстрактные объекты. В математике каждый полином является конкретным представителем некоторой рациональной функции, хотя полиномы — абстрактные объекты.

Приведённые примеры достаточно просты, и реализуемость абстрактного посредством конкретного здесь очевидна. В то же время не исключено, что абстрактные объекты очень высокого порядка (например, трансфинитные алефы, все ординалы второго числового класса и многие другие теоретико-множественные объекты) могут вовсе не иметь конкретных представителей, хотя они и вводятся аналогичными путями. Отсутствие конкретных представителей у тех или иных абстрактных объектов порождает естественное недоверие к ним у всех, кто не разделяет философию платонизма. В частности, в эпоху кризиса, касаясь проблемы обоснования математического анализа, Николай Николаевич Лузин отмечал, «насколько важно

установить точное разграничение между математическими сущностями, которые рассматриваются как *существующие*, и *другими*, реальность которых лишь кажущаяся... логическое направление в современной теории множеств есть источник неисчислимого количества математических сущностей, существование которых, в действительности, лишь чисто словесно»⁸⁶.

Но это, вообще говоря, далеко идущее продолжение нашей темы, требует отдельного разговора. Сейчас только замечу, что противопоставление «конкретный объект — абстрактный объект» полезно мыслить как относительное к системе определённых понятий и к способам фиксации объектов в сознании. Таким образом, в смысле гносеологическом нет абстрактных или конкретных предметов «вообще», а есть те или другие «в частности», поскольку конкретное как таковое по отношению к познанию имеет только экзотерический смысл. Оно рассматривается и объясняется (определяется) всегда с определённой точки зрения, то есть в аспекте абстрактной реальности, в то время как абстрактное в познании имеет смысл и само по себе — оно атрибут понятийного мышления.

Конечно, мы хотели бы иметь абсолютный критерий для того, чтобы отличать абстракции от не-абстракций. Но, как на это заметил Гегель, познание, желающее иметь вещи такими, какими они непосредственно кажутся, неизбежно впадает в противоречие со своей исходной посылкой. Выбор установки диктуется контекстом рассмотрения.

Так, пока отождествляли функцию с её конкретным аналитическим представлением, считали, что существует столько же функций, сколько и функциональных выражений. Однако позднее, когда приняли, что функция — это абстрактный объект, а её аналитические выражения всего лишь представители этого абстрактного объекта, аналитические формы записи функций стали отождествлять как функции и различать, как представителей. Теперь, желая сказать, что выражения $(x + 1)^2$ и $(x^2 + 2x + 1)$ тождественны как функции (а не как выражения), то есть, что каждое из них каждому значению аргумента x относит одно и то же значение (являясь, таким образом, всего лишь разными выражениями «одной и той же» функции), применяют функциональную абстракцию и пишут это тождество в λ -обозначениях как тождество λ -термов:

$$\lambda x. (x + 1)^2 = \lambda x. (x + 2x + 1),$$

где левая и правая части — это уже абстрактные объекты новой теории.

При этом применённая одновременно абстракция отождествления позволила свести абстракции более высокого порядка к абстракциям более низкого порядка, рассматривая функции тоже как

формальные объекты. Но, хотя и в том и в другом случае речь идёт об абстрактных объектах, это никак не ограничивает теорию, в которой предметом изучения являются функции. Такой теорией в данном случае является исчисление λ -конверсии⁸⁷, в котором вводится конструктивный способ представления функций — таблицы соответствий значений аргумента и значений функции — и условие комбинаторной полноты: для всякого выражения, которое может быть формализовано в λ -исчислении, можно образовать функцию в качестве абстрактного объекта этого исчисления. По существу, связывая функцию с определённым её выражением (её записью), само это выражение выделяют только как «носителя» (представителя) функции, хотя тоже абстрактного.

Очевидно, что выступая как информационный посредник между мыслью и объективной реальностью, представитель абстрактного объекта информирует в первую очередь не о себе самом, а о том объекте, который он представляет. Поэтому существует только тип представителя, а не его «личные» свойства». Это как раз и служит объективной основой для абстракции отождествления представителей. Правда, иногда представитель может информировать и о себе самом. Но тогда его семантическая роль меняется. Например, если в русском тексте строчная буква стоит непосредственно после точки, это может указывать (но не обязательно указывает) на ошибку.

Отмеченная выше особенность отношений между абстрактными объектами и их представителями служит, как я уже говорил, объективной основой для абстракции отождествления представителей. Этой абстракцией создаются многие абстрактные объекты, но не все. Той же цели порознь или сообща служат абстракция неразличимости и абстракция индивидуации, изолирующая абстракция и др. Такие абстрактные объекты, как функции и функционалы порождаются, как отмечено выше, функциональной абстракцией. В математике весьма важным теоретическим средством порождения абстрактных объектов являются абстракции бесконечности и осуществимости. В частности, используя абстракцию постоянства, абстракцию индивидуации и абстракцию потенциальной осуществимости, последовательно порождают натуральные числа и потенциально бесконечный натуральный ряд как абстрактные объекты арифметики. В свою очередь, дополняя указанные выше абстракции абстракцией актуальной бесконечности и схемой трансфинитной индукции, получают универсум всех натуральных чисел, а из последнего — упорядоченный вещественный континуум — абстракт-

тные объекты анализа и теории множеств. В этом и во многих других случаях вопрос о конкретных представителях, вообще говоря, не имеет эффективного решения: лишь немногие из всех вещественных чисел имеют таких представителей.

В зависимости от силы абстракций, порождающих абстрактные объекты, последние подразделяют на *реальные* и *идеальные*. Хотя и те и другие объекты абстрактны, для них по-разному ставится и решается проблема существования. В первом случае она имеет конструктивное решение, во втором — нет. Таким образом, идеальные абстрактные объекты — это объекты, утверждение о существовании которых выходит за пределы эффективной проверки или осуществимости. К примеру, упомянутый выше континуум классического анализа — это идеальный абстрактный объект, а континуум конструктивного анализа — нет. И всё же преувеличивать это различие, вообще говоря, не стоит. Будем ли мы называть материальной точкой вполне реальное физическое тело, размерами которого мы пренебрегаем (абстрактный объект), или же полученную предельным переходом далеко идущую идеализацию — тело бесконечно малой протяжённости (объёма), обладающее конечной массой (идеальный объект), это не изменяет главного: все объекты такого рода (все «материальные точки», как бы мы их не определили!) подчиняются определённым правилам (законам) и участвуют в строго определённой системе отношений. Именно эта система и определяет содержание абстрактного объекта «материальная точка».

Нередко говорят, что понятие «абстрактный объект» исчерпывается понятием о свойствах конкретных (эмпирически наблюдаемых, материальных) объектов. Однако, хотя каждый шаг перехода от мира наблюдаемых объектов к миру чисто теоретических сущностей обусловлен, конечно, некоторой абстракцией, замещающей наблюдаемый объект его теоретическим образом, в общем случае, абстрагируя, не просто «закрывают глаза» на что-либо, а создают некую мыслимую, быть может идеальную, сущность, независимую от какого-либо наглядного представления. Мир таких сущностей — это преимущественно мир науки, поскольку научное познание, как правило, идёт через абстракцию.

2.4. Абстракция в лабиринтах познания

Выделяя положительную задачу абстракции как главную для познания, мы можем объяснить, почему в науке развитие и совершенствование абстракций превращается в специальную целенаправ-

ленную деятельность. А к таким объяснениям побуждают нередко те, кто защищает тезис противоположный — «выработка абстракций никогда не являлась и не является специальной целью или задачей научного познания». Ясно, конечно, что этот последний тезис обязан аргументу от лингвистической парадигмы, когда от бедности и отрицательности лингвистического смысла абстракции заключают к бедности и отрицательности её гносеологического смысла.

Однако, если объективно и непредвзято посмотреть на логику познания «изнутри», найдется гораздо больше (чем кажется со стороны) оснований сказать, что всё наше теоретическое познание — «это структура из абстракций»⁸⁸.

Правда, условно мы делим процесс познания на логику и опыт. Но, строго говоря, наш опыт редко бывает «чистым», без примеси рациональной обработки. «Каждый отдельный опытный факт, поскольку он выражается с помощью понятий, — а как иначе мы могли бы его выразить? — является результатом духовной обработки опыта»⁸⁹.

Но опыт не только наводит на абстракцию как на нечто вторичное. Изначально, генетически, как неизбежный результат нашей физиологической организации и обучения, абстракция включена в опыт, подвергая анализу его исходный материал. Уже в элементарных актах восприятия реальность опосредована каким-то ее пониманием, дорисовкой объективной картины в соответствии с возможностями нашей памяти и прошлого опыта. Наш мозг интерпретирует и преобразует для нас (нередко вопреки нашей воле) реальность «чистых явлений», подобно тому как это делает наш язык, равно обыденный или научный, содержательный, полужформальный или формальный.

Можно сказать, что в каждом добротном результате познания одновременно отражены и факты, и способы их истолкования и объяснения. И в этом смысле контексты наших теорий представляют нам факты с той мерой доверия, которую заслуживают сами теории. И хотя известная независимость фактов от их теоретических представлений, конечно, неоспорима, все же научный способ ассимиляции фактов скорее напоминает обратный метод решения задач, когда по некоторым результатам ищутся их возможные основания, которые затем уже берутся как допущения (гипотезы) или аксиомы логической дедукции.

Простейшим вариантом абстракции является акт отвлечения, точнее — акт избирательного отражения или интерпретации данных. При одних и тех же данных в различных ситуациях возможны

различные акты отвлечения. И хотя произвольность этих актов неоспорима, они оправдываются обычно в той мере, в какой абстракция приводит к успехам в познании или практической деятельности. Произвольный акт отвлечения только случайно может дать такой результат. К примеру, отождествляя, как правило, выбирают лишь такие основания для отождествления, которые наделили бы абстракцию отождествления определённым гносеологическим смыслом. Обычно это определяется целью или задачей, или какой-либо другой установкой. Вообще от установки существенно зависит структура абстрактного образа (абстрактного объекта) и его перестройка (при смене установки). При этом абстракция может быть осознанной, отрефлектированной на уровне мышления, или неосознанной, осуществляемой на уровне функциональных свойств рецепторов (органов чувств, приборов). Однако в любом случае абстракция должна соответствовать какой-либо познавательной установке — выделять определённый «частичный образ» из практически необозримого множества возможностей (потока внешних данных). Ведь коль скоро речь идёт о познании, это единственный путь к истине, которая «открывается» познанию всегда только в частичных абстрактных образах, через разбиение целого на фрагменты, относительно независимые друг от друга.

Образно говоря, отвлечение от постороннего сравнимо с приёмами по устранению помех в канале связи (при передаче сообщений), а абстракция в целом — с приёмом фотографической фокусировки, когда одновременно создаются зоны резкости и размытости в изображении, выделяются нужные и приглушаются прочие черты, позволяя таким образом передавать «замысел изображения».

В процессе познания, направленном на понимание объективных явлений, психологический акт отвлечения играет немаловажную роль. Но, вообще говоря, в качестве активной формы познания абстракция должна оправдываться какой-либо более важной задачей, например созданием рациональных представлений такого высокого порядка, как структуры научного закона или научной теории. Последние уже не извлекаются из реальности простым обеднением (отвлечением от) известных нам целостных образов. Закон или теория — это мысленные синтезы того, что абстрагируется мышлением непосредственно, так сказать *ad oculos*, с тем, что создается мышлением специально *ad usum theoreticae*, когда «кусочки отвлечений» наша мысль организует в определенные группы **абстрактных образов**, — возможно так, как из отрывочных звуковых моментов композитор создает музыкальные мелодии и ритмы.

И у такой организации нашей мысли тоже должны быть свои принципы, подобные принципам ритмических построений.

Выражение «абстрактный образ», конечно же, фигурально. Но оно не более туманно, чем привычное — «образ мыслей». Наряду с абстрактным, представляемым в созерцании, оно подразумевает и тот основной случай, когда абстрактное возможно только как «смысловая структура», которая возникает на почве, быть может, наглядного опыта, но которая в речевую или наглядную структуру переводима уже не всегда.

Так, к примеру, первые эмпирические понятия о фигурах тел в наблюдаемом пространстве — «абстракцию чувственной фигуры» — создают индуктивно, отвлекаясь от всех свойств наблюдаемых тел, кроме их формы и размеров. Но это только первый, психологический, аспект понятия, обусловленного на этой ступени познания всего лишь тем, что само по себе ещё дано в созерцании. Собственно геометрический (научный) аспект сообщают этим понятиям посредством их логической реконструкции, пополняя выделенные отвлечением эмпирические свойства теоретическими, наделяя отрезки свойством непрерывности, прямые — неограниченной протяженностью, пары параллельных прямых — бесконечно удаленной точкой и т.д., и т.п., то есть вообще всеми свойствами, которые необходимы для формулировки и доказательств чисто геометрических теорем. В сущности, это уже не только *абстракция-отвлечение* — усвоение лишь части из множества данных, но и *абстракция-пополнение* — прибавление к этой части новой информации, не вытекающей из этих данных. И в этом смысле абстрактный образ — это идеальность, обусловленная целью и задачей науки.

Хотя многие абстракции формализуются в нашей речи, отождествлять «язык мыслей» и «язык речи» не всегда уместно. К примеру, наша логическая деятельность связана с языком, но она не исчерпывается языком. Идея слова — передавать множественность понятий (смыслов). Но именно абстракция концептуализирует слово, превращает слово в понятие. Иначе говоря, абстракция и сопутствует слову, и напутствует слово⁹⁰. Посредством абстракций мы «носим» действительность в своей голове в некотором приведенном (редуцированном, свернутом) виде, когда множества смыслов отождествлены и обобщены. При этом в языке смыслов мы можем отождествлять то, что обычно различаем в речевом языке. Так, слова «Гомер» и «автор Илиады» в речевом языке мы естественно различаем, а в язы-

ке смыслов отождествляем, поскольку дескрипция в языке понятий — это не только другой речевой знак, но парафраз собственного имени, а следовательно, и знак с тем же смыслом⁹¹.

С точки зрения гносеологической основная особенность мысленного образа по сравнению с наглядным заключается совсем не в том, что один является упрощением другого. В восприятии реальность нам дана непосредственно, как фотографический снимок, сделанный, так сказать, без «задней мысли», на котором отразилось все, что могла отразить камера при полной глубине резкости объектива. Тут есть точка зрения, но нет «анализа с точки зрения». Последний подразумевает прежде всего «замысел изображения», а не «совпадение в деталях». От хорошего снимка, как и от хорошей картины, требуется передача настроения или мысли, то есть чтобы снимок или картина были абстракцией — обобщенным образом реальности. «Закон нашего сознания, — говорит Гегель, — поскольку оно выступает как теоретическое сознание, состоит не в том, чтобы воспринимать предметы совершенно пассивно, а в том, что оно должно чтобы воспринимать предметы, направить на это свою деятельность»⁹². Именно в силу этой деятельности в абстракции данное нам опытом содержание, как правило, дополняется понятийным содержанием, не выводимым из опыта. Гегель говорит — противостоит содержанию. И это тоже верно, поскольку речь идёт о сравнении качества образов. Но это не означает, конечно, что мысленный и чувственный образы исключают друг друга. Просто когда мы говорим об абстракции как мысленном образе, процесс абстракции подобен фокусировке.

Бесспорно, что наша способность к мысленным образам более высокого порядка предполагает и более развитую способность представления и что в науке наряду с логической тенденцией всегда имеется тенденция к наглядности, к образному истолкованию ее объектов⁹³. Говоря иначе, в нашем отношении к абстракциям логикой самого дела культивируется психология эмпирика. Даже в математиках, которые порой стремятся представить свой предмет с «наглядной стороны», опираясь не столько на доказательство рассуждением, сколько на «образ». Аристотель преувеличил, сказав, что математик исследует отвлеченное, опуская все наглядно воспринимаемое⁹⁴. Не случайно, когда возникает потребность в обосновании того или иного мысленного образа, мы прежде всего стремимся отыскать его прообраз в доступном нам наглядном представлении, отвечающем нашему естественному стремлению к «материальной гарантии» истинности. К примеру, абстракцию трансфинитных ординалов

иногда оправдывают эффективным представлением о росте функций (Э. Борель) или идеальный образ бесконечно удаленной точки — чертежом, представляющим её наглядный образ на проективной плоскости. Это не означает, конечно, сведения абстракции к эмпирическому факту. Когда бесконечность прямой понимается как возможность (в двух направлениях) неограниченного её продолжения, абстракция потенциальной осуществимости продолжения здесь неизбежна, и её (эту абстракцию) нельзя исключить, не исключив вместе с ней математическую суть Евклидова понятия геометрической прямой на плоскости. И тем не менее, в предпосылке о неограниченном продолжении прямой сохраняется наглядное понимание того, как возникает мысленный образ этой абстракции, наглядное понимание пути, приводящего к чисто логическому описанию теоретически возможного факта незамкнутости прямой.

Но наглядные образы науки, которыми мы сопровождаем до поры до времени самые простые ее мысленные образы, не являются, конечно, эмпирическими в строгом смысле этого слова. Ведь иначе мы не смогли бы, опираясь на такую наглядность, утверждать, что точка касания прямой к окружности только одна, что разность расстояний точек гиперболы от ее фокусов постоянна и т. п. Абстрактность такой наглядности особенно подчеркивается операцией предельного перехода, с помощью которой создаются многие образы науки. Но эта абстрактность все же заметно слабее абстрактности мысленных образов, вводимых на основе аналитических средств. В самом деле, аналитическому представлению посредством уравнений лишь отчасти сопутствуют наглядные примеры, сложившиеся в процессе индуктивного их уяснения. Если же мы берем аналитический язык за основу, ограничивая функции, входящие в уравнения геометрических форм, только общими требованиями непрерывности и дифференцируемости, то есть обычными требованиями, предьявляемыми нами к пространству, то очень скоро мы можем потерять всякую способность к наглядному представлению форм, определяемых этими уравнениями. Нередко это приводит к трудностям (или даже невозможности) применения аналитических методов в прикладной области, например при решении инженерных задач. Но вряд ли это можно выставить аргументом против аналитических методов в той же геометрии, если перенос акцента с абстрактного наглядного представления пространственных форм на аналитическое, вообще говоря, «необходим для более глубокого проникновения в эту область»?⁹⁵

И всё же следует иметь в виду, что язык образов и аналитический язык не однозначно упорядочены между собой по основаниям «слабый» или «сильный». Аналитический язык, несмотря на его абстракт-

ную мощь, может «маскировать» многие свойства объектов, представленных на этом языке и таким образом давать неполную информацию об этих объектах. В свою очередь, язык наглядных образов (синтетический язык), несмотря на его меньшую абстрактную мощь, такие замаскированные свойства нередко позволяет увидеть и в этом отношении он более информативен, чем аналитический язык⁹⁶.

2.5. Осмысление абстракций

Дело науки, говорил А.И. Герцен, возведение сущего в мысль. Только мысль переводит отражение факта из формы представления в форму понятия или теории. А эти формы, конечно, суть абстракции. И уж коль скоро мир осмысливается наукой в абстракциях, осмысление самих абстракций – важнейшая задача научной методологии.

Выше я уже говорил о том, что абстракция нам нужна прежде всего как источник априорной информации о её возможных моделях с тем, чтобы опередить опыт. Следовательно, в абстракции должна содержаться информация, которую нельзя извлечь из той части опыта, что служит нам для индуктивных шагов порождения абстракции или материальной её проверки. Иначе говоря, доступный нам фрагментарный анализ реальности является не единственной основой абстракции. Этот анализ дополняется размышлением, логикой, наконец, интуицией и умозрением. В результате абстракция возникает не только как результат отвлечения от данных опыта, но и как результат их восполнения.

Правда, восполнение нередко определяют как особый тип мыслительного акта – как идеализацию, отделяя последнюю от абстракции как акта чистого отвлечения. При такой постановке вопроса абстракция всегда имеет основу в (объективной) реальности, а идеализация нет, ведь задача последней, как в этом случае говорят, – наделять объекты теории «такими воображаемыми свойствами, которые совершенно отсутствуют у исходных объектов или же отражают свойства исходных объектов в значительно искажённом виде»⁹⁷.

Разумеется, нет смысла спорить с определением. Но стоит заметить, что если объекты, поставляющие исходный материал для наших мыслительных операций, нам известны «сами по себе», независимо от этих операций, то какой резон наделять эти объекты (свойства которых мы уже знаем) ещё некими воображаемыми свойствами. Если же мы не знаем, что представляют из себя объекты «сами по себе», то о каком именно искажении идёт речь и в силу каких оснований мы

можем судить, что свойства, которые мы им приписываем, — это чисто воображаемые свойства и к тому же совершенно у них отсутствующие? Короче, операция «наделения» воображаемыми и «совершенно отсутствующими свойствами» становится слишком подозрительной, чтобы остаться без солидного оправдания. Все заявления об искажении и огрублении действительного положения дел, о воображаемых свойствах и пр. имеют смысл лишь тогда, когда их можно проверить и подтвердить, для чего, в свою очередь, потребуется, конечно, априорное знание о том же действительном положении дел. Иначе говоря, ситуация всеведения (как невозможная ситуация) здесь неизбежна.

Замечу, между прочим, что для Маха идеализация — это один из вариантов абстракции. Выделяя некоторый абстрактный, «частичный объект», мы уже идеализируем реальность. При этом мы знаем, от чего отвлекаемся, а что оставляем в стороне. Оставляя в стороне действия сил на движущееся тело, приходим к *идеальному понятию* о равномерном и прямолинейном (вечном) движении. Мы идеализируем, говорит Мах, ибо движения без действия сил в действительности не бывает.

Однако я не понимаю, что идеализируется в данном случае. Помоему, принцип инерции говорит лишь об *условном существовании* (это импликация «если..., то»), и в этом смысле он ничего не идеализирует.

Мне всегда казалось, что есть какая-то внутренняя несогласованность в позиции тех, кто, полагая, с одной стороны, что абстракция — это метод отыскания принципов (аксиом) научного познания, с другой стороны, настойчиво подчёркивает, что результатам абстракции (и идеализации то ж) «не соответствует ничего действительного». Стоит ли тогда делать из этого теории? И тут я готов повторить очень точную, на мой взгляд, мысль Маха: «правильно оценивает... абстракции только тот, кто рассматривает их как *интеллектуальный рискованный замысел* (intellktuelles Wagnis), оправданный успехом»⁹⁸.

Трудность обоснования реального содержания абстракций или невозможность их эффективного введения в теорию давно уже породила тенденцию отказаться от выяснения того, что значат абстракции «сами по себе», независимо от их внутренней роли в теории, и перенести акцент с внешнего вопроса на внутренний, с проблемы истины на проблему смысла.

Проблема смысла и проблема истинности — это две разные, но дополняющие друг друга проблемы. В формализованных языках научных теорий проблема осмысленности абстрактных объектов со-

ставляет узкий аспект семантики синтаксиса. Но в общем гносеологическом контексте познания она является важной, поскольку она всегда предваряет проблему истинности — основную проблему теории моделей. И действительно, истинность или ложность суждения как функция его смысла — это естественно, но, вообще говоря, вряд ли наоборот, если не иметь в виду какой-либо чисто формальной процедуры. Если истинностная оценка суждения возможна, то такое суждение наверняка осмысленно. Если истинностная оценка невозможна, то отрицать осмысленность суждения рискованно в отсутствии других аргументов. Но если суждение бессмысленно, а мы оцениваем его как ложное, то это только формальный приём редукции (операция «погружения») с целью избежать трёхзначной семантики.

Характер отношений семантики истинности и семантики смысла выявляется особенно отчетливо при сравнении теорий: теории, родственные по предмету, но основанные на существенно разных абстракциях, обе могут быть истинными, так как понятие «истинно» — в силу требований семантики смысла — заменяется на понятие «истинно в модели». При этом не исключено, что синтаксические структуры теорий могут соотноситься между собой как «часть и целое», например, они могут вкладываться одна в другую, подобно русским матрешкам. Но смысловые структуры теорий в этом случае «принципу матрешки», вообще говоря, не следуют: разные семантики не вкладываются одна в другую, а замещают одна другую — сильная семантика замещает слабую. Так, все законы положительной логики (как абсолютной логики) имеют силу в интуиционистской и классической логиках, однако положительные исчисления, взятые «сами по себе» и «те же» исчисления (как подсистемы) внутри этих более сильных логик — это исчисления с различной семантикой логических связок, которая для первых определяется автономно, а для вторых наследуется от более сильных логик.

В связи с тем, что интуитивное понятие истинности заменяется, как правило, понятием истинности в модели, возникает вопрос: могут ли теории, интуитивно относящиеся к «одному и тому же» предмету (к одной модели), но основанные на существенно разных абстракциях, быть истинными одновременно? Это вопрос *логики выбора*. Вполне вероятно, что, хотя обе теории истинны, каждая из них «истинна по-своему» — предмет этих теорий только по видимости один и тот же, общий. И в силу этого привычное правило логики $A, B \Rightarrow A \& B$, позволяющее от истинности двух утверждений перейти к утверждению истинности их конъюнкции, не может быть принято в

логике выбора. Принимая во внимание семантику истинности, оно игнорирует семантику смысла. По той же причине для логики выбора неприемлемо и другое известное правило: $\neg(A \& B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$.

Обращаясь к вопросу об осмыслении абстракций, естественно вспомнить номиналистическую идею редукции и предположить, что осмыслить абстракцию — это значит каким-то образом выразить её смысловое содержание через смысловое содержание абстракции более низкого порядка. А это значит — представить первую как обобщение второй с сохранением ее исходной семантики или, по крайней мере, с сохранением той части этой семантики, которая не является посторонней при данном обобщении. Когда речь идет об абстракции некоторой теории, такого рода прием нередко непосредственно приводит и к более общей теории, в которой абстракция высокого порядка играет ту же самую роль, какую соответствующая ей абстракция более низкого порядка играет в обобщаемой теории. Поэтому, если смотреть на дело с точки зрения более общей теории, различие между абстракцией высокого порядка и абстракцией низкого порядка оказывается несущественным.

Поясню эту мысль на простом примере. Известно, что основные понятия элементарной, или Евклидовой, геометрии (точки, прямые, плоскости) и сама эта геометрия возникли как абстракции от наблюдений за поведением физических тел. Следовательно, это абстракции не очень высокого порядка, даже если принять во внимание их интеллигибельный смысл, связанный с операцией предельного перехо­да.

В свою очередь, проективная геометрия возникает как обобщение элементарной и как абстракция от ее абстракций. Значит, вообще говоря, понятиям проективной геометрии следует приписать более высокий порядок абстрактности, чем понятиям геометрии элементарной⁹⁹. И одной из таких более высоких абстракций является понятие о бесконечно удаленной точке. Осмыслить эту абстракцию через абстракцию обыкновенной метрической точки — значит, в соответствии с допущенным выше, просто перенести все проективные (и только проективные) свойства обыкновенной точки на точку бесконечно удаленную.

Так именно и поступают в геометрии, руководствуясь принципом постоянства формальных законов, согласно которому законы операций, определённые для элементов некоторой исходной области (в данном случае для точек евклидовой плоскости), при последующих её обобщениях (в данном случае за счет бесконечно удаленных точек проективной плоскости) должны сохраняться и для новых элементов. Этим устанавливается связь прежних и новых понятий, смыс-

ловое отношение абстракций разных порядков. При этом само собой возникает представление об индуктивной цепи обобщений, звенья которой отличаются друг от друга определенным шагом абстракции и семантической новизны. Развитие познания предстает в этом случае как дискретный процесс, на каждом новом этапе раскрывающий новую «сущность»¹⁰⁰.

Последние слова предыдущего абзаца могут показаться странными с точки зрения идеи смысловой редукции. В самом деле, не приводит ли редукция смысла к устранению той отличительной особенности абстракции более высокого порядка, которая в данном примере выражается предикатом «бесконечно удаленная» и которая составляет особую, новую семантику этой абстракции?

На этот вопрос, как я думаю, нельзя отвечать «вообще», а только имея в виду определенную интервальную ситуацию.

Так, если иметь в виду интервальную ситуацию, порождаемую аксиомами проективной геометрии, то ответ должен быть отрицательным, ибо в этом интервале нет никакого различия между обычными и бесконечно удаленными точками: и те и другие в равной степени являются объектами проективных преобразований. Причём заведомо предполагаются конечные образы бесконечно удаленных точек. Это предположение настолько существенно, что бесконечно удаленные объекты вообще «имеют смысл лишь постольку, поскольку они рассматриваются при некоторой конкретной компактификации данного «конечного» пространства»¹⁰¹.

Значит, вопрос о новой семантике может относиться к какой-то внешней точке зрения по отношению к проективной, например, к той, которая исходит из Евклидова, а не проективного понятия плоскости. С этой точки зрения мы действительно наталкиваемся на новую семантику бесконечно удаленных объектов. Но и здесь, вообще говоря, метрические свойства конечных объектов мы можем перенести на объекты бесконечно удаленные, если несколько расширим понятие о метрических свойствах за счет их аналитической модели.

Действительно, понятие о бесконечно удаленной точке вытекает из аналитического выражения данного отношения отрезков:

$$x = x_1 - \lambda x_2 / 1 + \lambda,$$

где λ — некоторая постоянная. В случае бесконечно удаленной точки $x = \infty$, а $\lambda = -1$. Точнее, $\lim \lambda = -1$ при $x \rightarrow \infty$. Единственность бесконечно удаленной точки диктуется аналогией с обычными точками, для каждой из которых λ единственно.

Наконец, надо принять во внимание то, что внутри интервальной ситуации, порождаемой только евклидовыми аксиомами пространства, бесконечно удаленные объекты вовсе лишены семантики, и если мы говорим о проективном обобщении элементарной геометрии, то имеем в виду позицию, внешнюю по отношению к геометрии евклидовой плоскости. Обобщение достигается как раз посредством того, что введенная извне новая семантика «как бы элиминируется» в интервале абстракций проективной геометрии, то есть конечные элементы пространства уравниваются в правах с бесконечными. Пополнение плоскости бесконечно удаленными объектами (точками и прямыми) расширяет понятие перспективного отображения до понятия перспективного преобразования (гомологии), позволяя таким образом выделять чисто проективные свойства фигур — так называемые проективные инварианты. А смысловая редукция в данном случае позволяет изучать бесконечно удаленные образы на их конечных моделях. Осмысливая бесконечное как конечный образ в плоскости проективного изображения, она превращает трансцендентное в реальный объект познания.

Аналогичным образом и в общей теории функций проблема с самого начала заключалась не в том, чтобы «развести» арифметику и анализ, конечное и бесконечное, дав каждому из них свое особое основание, а в том, чтобы высшие формы математических представлений о бесконечном, например различные частные случаи актуальной бесконечности в канторовской теории трансфинитного, осмыслить (но не исключить!) с точки зрения форм математических представлений более низких, вырастающих если и не прямо из опыта, то все же соседствующих с опытом, с эмпирическим познанием. В сущности, именно эту проблему отношения конечного и бесконечного в настоящее время так или иначе решают различные неклассические подходы к теории множеств.

2.6. Исключение абстракций

Теперь я коротко затрону вопрос об исключении абстракций, который иногда называют вопросом об уточнении абстракций, выявлении их конструктивного содержания. Но, в сущности, это вопрос о том, консервативны ли абстракции, верно ли, что всё, что мы можем получить с их помощью, мы можем получить и без них.

Тему исключения абстракций в отечественной философии утвердила Софья Александровна Яновская¹⁰². Но эта тема традиционная для всех философских направлений в основаниях науки, либо

явно, либо неявно исповедующих установки номинализма. В их число входят, в частности, эффективизм, интуиционизм, и конструктивное направление в основаниях математики, представленное у нас работами марковской школы. Поэтому, затрагивая вопрос об исключении абстракций, я коротко представлю общие установки философского номинализма (методологического эмпиризма) по этому вопросу.

Согласно номинализму, предметный мир вне мышления и сознания — это всецело эмпирический мир. Вне чувственного опыта нет никакой объективной реальности. Только конкретные вещи (индивиды) существуют в физическом смысле этого слова. Поэтому онтология номинализма допускает лишь минимальные классы родовидового порядка (*infima species*), лишь один «уровень реальности» — уровень пространственно-временных объектов («фактов», «конкретов», «атомов» и т.п.), которые одни существуют «сами по себе», тогда как все возможные отношения между ними и даже некоторые их свойства зависят от способов нашего рассмотрения. Что же касается **абстрактных объектов** (универсалий), которые в чувственном опыте не даны, то они «сами по себе» (вне мышления и речи) не существуют. Своим действительным существованием и значением они обязаны их материальному носителю — языку. И поскольку существование абстрактных объектов чисто словесное, их включение в онтологию недопустимо.

Эта общая, так сказать «академическая», установка номинализма пополнялась и обогащалась разработками частного порядка по мере развития философии и науки. Современный номинализм, изгоняя абстрактные объекты из онтологии, не запрещает их использование в теории или в научной практике, лишь бы при этом правильно пользовались абстракциями и умели отличать полезные абстракции от бесполезных, а для этого необходимо прежде всего уметь доказывать непротиворечивость вводимых абстракций, в частности уметь их **исключать** разысканием подходящей эмпирической модели. К примеру, использование абстракций «добро» и «красота» гносеологически оправдано уже таким очевидным эмпирическим фактом, как существование добрых людей и красивых женщин.

Простым допустимым способом введения абстрактных объектов номинализм считает практику их контекстуальных определений. В этом случае абстрактные объекты вводятся в теорию как *façon de parler*, или как символические фикции. Эти символические фикции не имеют «собственного» значения, но их использование служит «сокращающим приёмом» для формулировки вполне осмысленных утверждений о реальных объектах, особенно в тех случаях, когда этих

объектов конечно необозримое или бесконечное множество. Так, говорят «всё красное» вместо того, чтобы говорить: «это красное» и «это красное», и «это...», то есть вместо того, чтобы перечислять (что практически невозможно) все красные предметы. Подходящим контекстуальным определением можно образовать и абстракцию класса всех натуральных чисел без того, чтобы принимать этот класс в качестве объективной сущности. В арифметике вещественных чисел такого же рода абстракцией является «логарифм», имеющий смысл в контексте « $\log x$ », где x — вещественное, и притом положительное, число. Поскольку подобные символические фикции служат для выражения определённых фактов, они, естественно, не лишены познавательного значения. К примеру, контекст « $\log x$ » можно исключить, заменив его соответствующим числом: положительным, отрицательным или нулём, а не фикцией. Этим с точки зрения номинализма и подтверждается принципиальная онтологическая необязательность абстрактных объектов — необязательность рассматривать их как нечто самосущее наряду с конкретными объектами. Например, функцию « $\log x$ » рассматривать как реально существующий объект, независимый от существования вещественных чисел.

И всё же, несмотря на ясность программной установки номинализма, реализация этой установки неизменно наталкивалась на трудности, в особенности, когда шла речь об исключении абстрактных объектов из онтологии научных теорий, и в частности, из онтологии математики. Эти трудности указывают на сомнительность самой идеи «исключения», если понимать исключение буквально.

Конечно, существенная сторона любой абстракции — её конструктивный смысл, конечная информация о приложимости абстракции к чему-нибудь. Это «что-нибудь» обычно называют моделью абстракции. Но абстракция может иметь различные неизоморфные модели. Поэтому модель, вообще говоря, не исчерпывает информационное содержание абстракции, а только показывает, какая часть этого содержания участвует в структуре данной модели. С другой стороны, когда абстракция неполна (просто некатегорична), её содержание необходимо, но недостаточно для однозначной характеристики модели — оно лишь отчасти говорит о том, какой должна быть действительность, чтобы её можно было считать моделью этой абстракции.

Следовательно, вопрос о моделях (и, соответственно, об исключении) абстракции — это не только вопрос об их практической применимости. Это также и гносеологический вопрос, связанный с мерой доверия к логической способности создавать абстракции, к пра-

вомочности этой способности по отношению к опыту. Между тем, условие «модельного восполнения» абстракций философией номинализма трансформируется в условие исключения абстракций, что является более сильным, чем условие их модельного восполнения. Последнее вполне может отвечать теоретико-множественной практике введения абстракций. Подход, сохраняющий теоретико-множественную точку зрения, вполне доверяется максиме, согласно которой истину можно утверждать, даже если её нельзя проверить. Требование наглядности удовлетворяется здесь лишь постольку, поскольку объекты, предлагаемые в качестве моделей той или иной абстракции, просто соглашаются считать наглядными.

Напротив, главное, на чём настаивает методологический эмпиризм, это то, что абстракции любых (в том числе и высоких) порядков суть обобщения, полученные неполной «индукцией из очевидных свидетельств наших чувств» (Д.С. Милль). Поэтому абстракции не имеют собственной смысловой структуры, а их сведение к данным чувственных восприятий, к наглядному уровню познания должно быть абсолютным¹⁰³. Неудивительно, что с этой точки зрения абстракции классической математики приходится квалифицировать как искажение «наших знаний об исходной ситуации». Но уже понятие семантической определмости, необходимое при построении номиналистического варианта теории множеств, предполагает использование нефинитных абстракций, не говоря уже об абстракциях потенциальной осуществимости и отождествления (тоже абстракциях как-никак!).

Не лучшим образом для номинализма обстоит дело и с требованием абсолютной конкретности и индивидуальности вводимых в теорию объектов, поскольку «с того момента, как мы ограничиваем номиналистический тезис языком-объектом, допуская свободное использование интуиции в метаязыке, этот тезис теряет право на существование... Анализ убеждает нас в том, — говорит математик, близкий к интуиционистской школе, — что само понятие “конкретная вещь” не удовлетворяет номиналистическому постулату... То, с чем мы встречаемся на практике, всегда *более или менее конкретно* (курсив мой. — М.Н.). Какая-либо строгая альтернатива возможна только через абстракцию»¹⁰⁴. Ранее подобной точки зрения придерживался Александр Бэн¹⁰⁵ и многие после него, столкнувшись с трудностью удовлетворительной дихотомии (и определения) понятий на «абстрактные» и «конкретные»¹⁰⁶.

Если следовать номиналистической установке, необходимо иметь абсолютный критерий, отличающий абстракции от неабстракций. Но в науке нет «чистой эмпирии», безусловных, окончательных и очевидных конкретностей, устраняющих потребность в абстрактных объектах. Научное познание — это творчество. И абстракции в этом творческом движении познания, как я уже отмечал, — это не просто «строительные леса», которые после постройки какой-либо точной отрасли знания можно — и даже нужно — отбросить. К тому, что называют сегодня «научным опытом», приходят путем всё более и более абстрактных построений, так что абстрактное — уже не только форма и метод, но и самая «суть дела» науки.

Тем не менее, стремясь «разгадать» абстракцию, стоит изучить возможности замены её наглядным образом (её абстрактным представителем) там, где такие возможности действительно имеют место. А это прежде всего *выразимость* абстракций в их языковых формах. И в этом, так сказать, лингвистическом плане конструктивное исключение абстракций усматривается в *формализации*, поскольку в этом случае используются только финитные способы их представления.

Такое финитное представление с гносеологической точки зрения действительно означает «возвращение» к наглядному уровню познания. Оно отличается, в частности, тем, что абстрактные объекты заменяются наглядными объектами исчислений в рекурсивно перечислимом множестве их «языковых моделей», сравнение которых сводится затем только к их пространственно-временному сопоставлению по отношениям тождества или различия. В этом смысле формализация — это своего рода обращение к их «положительной достоверности», основанной на «непосредственном материальном созерцании, хотя и абстрактном»¹⁰⁷, но абстрактном в более слабом смысле, чем исходный, когда мысль не опирается на требование конструктивности, посредством которой она (мысль) обретает «видимый облик», играющий роль посредника между «миром идей» и «миром вещей».

Сводя содержание теории к «форме и правилу», формализация, по существу, связана с используемой в ней логикой рассуждений. Не случайно первые попытки полной формализации (а не только полупормального представления) относятся к области логики. Современные методы формализации мысли придали логическим операциям над суждениями вполне «вычислительный» характер, а логическим доказательствам — вид формальных выводимостей, в которых обращения к содержанию суждений фактически не требуется, а требуется лишь адекватное восприятие материального объекта — вывода формулы, ко-

дирующей доказываемое положение. В результате восходящая к Аристотелю идея доказательства теорем и вывода следствий при помощи некоторого механического приёма (идея «алгоритмизации» логического вывода) в решающей степени обеспечена современными методами логической формализации, которая позволила перейти от интуитивных выводов, обращённых к нашим мыслительным способностям воспринимать смысл суждений, к выводам сугубо формальным, интерсубъективным.

Формализация содержательно введённых абстракций помогает устранить различия и двусмысленность в обычных речевых приёмах их выражения, служит для более полного и строгого изучения этих абстракций, позволяя решать задачи, которые ставятся обычно «вне», но разрешаются только «внутри» формализованных теорий. Таковы задачи о непротиворечивости научных теорий, об их синтаксической и семантической полноте, о характере, существовании и различимости их моделей, о формализуемости определённого рода понятий, об их разрешимости или неразрешимости.

Возможность формализации не означает, вообще говоря, полного исключения содержательного подхода к абстракциям. К примеру, выводы исчислений «сами по себе» лишены семантики, ответственной за истинность выводимых формул, кодифицирующих абстракции теории, а мы хотели бы, конечно, чтобы эти абстракции были истинны. Но если формализация абстракции вообще осуществима, то, по крайней мере, можно поручиться за связь этой абстракции с тем, что уже точно может быть представлено наглядным образом.

Среди других часто употребляемых наглядных моделей абстракций можно назвать конечные таблицы, матрицы, аналитические (формулы) и номографические (графики, функциональные шкалы) способы представления функций. Так, в инженерно-технической практике, изучая свойства какой-либо функции, зачастую пользуются ее наглядной графической моделью. Эти модели не передают, конечно, всего содержания абстракций. Но такие модели часто передают главное для нас: общий вид функций, характер изменения функции на отрезке и пр. Они часто служат и вспомогательным наводящим средством для дальнейшего исследования свойств абстракции.

Свойства абстракций выражаются при этом, конечно, с такой только точностью и полнотой, какая доступна для графических средств. Но в целом ряде случаев этой точности и полноты представления достаточно для суждения о практически значимых свойствах

абстракций. По графику функции можно, например, сказать, является ли она дифференцируемой или нет. Пользуясь графиком, можно получить решения разного типа уравнений, вполне достаточные для инженерно-технических целей.

Построение языковых моделей абстракций – это теоретический (и притом не единственный) план исключения абстракций. Практический план исключения абстракций – это техническая применимость (реализация) абстракций, например использование их в расчетах технических систем, когда в силу ряда обстоятельств приходится прибегать к приближённым решениям, «разрезая» информацию аналитических образов. Именно в контексте практики, в частности, путём технической и промышленной приложимости, подтверждается объективная значимость абстракций, а заодно и объективная природа теоретического познания. Но если и не найдено подходящей технической модели абстракции, то это не умаляет её научной ценности. Ведь цель «порождения» абстракции может лежать вне технических потребностей ее применения.

Например, логические операции издавна относились к чисто теоретической сфере деятельности, а законы логики воспринимались только как законы мышления. Их техническая приложимость начинается, как известно, лишь с 40-х годов нашего века. Решающую роль при этом сыграла кодификация логических законов в языковых системах математической логики, установление изоморфизма алгебры логики и алгебры переключательных (нуль-единичных) функций, а точнее, обнаружение того, что обе они являются изоморфными реализациями одной и той же абстрактной математической структуры – булевой алгебры. Математическая развитость этой двоичной алгебры обеспечила ее быстрое практическое применение в системах телефонии, в цифровых вычислительных устройствах и в промышленности, например в задачах автоматизации телеуправления энергосистемами, железнодорожным транспортом и вообще там, где она оказалась подходящим средством для описания поведения технических систем. Но реализуемость «техники мышления» в промышленности значимых моделях самой этой техники не столь уж важна. На время она сделала логику популярной наукой, поставила перед ней несколько новых инженерных задач и задач по моделированию познавательных процессов (по искусственному интеллекту), однако не изменила основной задачи этой науки – анализа способов рассуждений и доказательств, породив разве что предрассудок, будто формальная логика является наукой, посторонней мышлению. Сегодня, тем не менее, ясно, что предмет логики – это по-прежнему

и прежде всего мыслительный акт, это умозаключение, изучаемое с опорой на «внешние» средства путем словесной (знаковой) формы записи мысли, ее кодификации (отображения) в формальном языке, логическом исчислении и т. п. с целью свести до минимума подсознательные, энтимематические и эллиптические элементы мыслительного акта. Но только когда семантику этого акта удастся полностью выразить синтаксическими средствами формального языка (что случается не так уж часто), возникает и возможность технического моделирования этой семантики, и возможность конструктивного исключения логических абстракций.

2.7. Абстракция и научный метод

Экспериментальное исследование и обобщение его результатов — это, пожалуй, основной метод естествознания. Понимается это обычно так, что, начиная с чего-то конкретного, эмпирического, частного, естественнонаучный метод должен закончить чем-то абстрактным, теоретическим, общим. Именно по типу этой индуктивной аргументации такой путь познания характеризуют как эмпирический метод, хотя этот метод и приводит в конечном итоге к общим теоретическим результатам.

Стоит, однако, уточнить посылки экспериментального исследования, как тотчас же обнаружишь, что то конкретное, эмпирическое, частное, с которого это исследование начинают, основывается по крайней мере на двух чисто логических абстракциях:

1) на *изолирующей абстракции*, поскольку, прежде чем провести эксперимент, необходимо выяснить суть вопросов, на которые он должен давать ответ, и соответственно этому выделить некоторое конечное множество начальных условий, обеспечивающее всё существенное для интересующих нас в этом эксперименте явлений;

2) на *абстракции неразличимости*, поскольку приборы, которые мы используем в эксперименте, ограничены конечной разрешающей способностью различения, как бы они ни были точны. Более того, в начальные условия должна непременно входить и некоторая адекватная исследованию точность этих приборов, ведь если точность будет недостаточной или «если мы станем наблюдать слишком пристально, мы... ничего не сможем понять»¹⁰⁸.

Положение, высказанное здесь по отношению к методам экспериментальным, или естественнонаучным, тем более верно по отношению к методам дедуктивных наук: «Со времен Аристотеля, если не с еще более давних, хорошо известно, что в основе любой науки

лежит то, что можно было бы назвать “*принципом намеренно неполного знания*”, абстракция и обобщение как раз и состоит в том, что определенные свойства рассматриваемых объектов систематически игнорируются. Аксиоматический метод в математике представляет собой не что иное, как применение этого принципа¹⁰⁹.

Очевидно, что монополия математики на этот принцип не бóльшая, чем любой другой дедуктивной (или полудедуктивной) науки. Поэтому, с некоторыми дополнениями насчёт абстракции, эта мысль выражает общую рациональную посылку познания – абстракции лежат в основе любого научного метода. И понятно, что в каждом отдельном случае научного исследования или оформления этого исследования в научную теорию эта общая посылка реализуется в абстракциях на данный случай, идущими, так сказать, *in medias res*.

Например, переход от содержательной аксиоматики к формальной – это обобщение, требующее одновременно некоторых более сильных абстракций, чем те, которые лежат в основе содержательной аксиоматики. Одной из таких более сильных абстракций является гипотеза об экзистенциальном характере формальной аксиоматики, представление о ее возможной предметной области (о ее универсуме) как о «единой совокупности». А это уже явное понимание значения абстракции актуальной бесконечности для аксиоматической теории, хотя эта абстракция и не формулируется явно в виде аксиомы такой теории¹¹⁰.

Другой пример – аналогичный – дает понятие о плотности (непрерывности) вещественной прямой. Оно основано на абстракции, что путем деления масштаба можно построить отрезок, меньший любого данного. Принимая такую абстракцию, игнорируют, в свою очередь, абстракцию фактической неразличимости, от которой стандартный математический анализ отказывается уже с первых шагов своего появления, оставляя, правда, некоторую возможность для компромисса.

В свою очередь, нестандартный анализ, также игнорируя фактическую неразличимость, принимает инфинитную абстракцию бесконечно малых. И здесь мы имеем еще один хороший пример осмысления абстракции более высокого порядка (гипервещественного числа!) через абстракцию более низкого порядка, т. е. через абстракцию вещественного числа, поскольку поле гипервещественных чисел строится так, что его элементы имеют все те же свойства, что и вещественные числа, и в то же время является обобщением поля вещественных чисел¹¹¹.

Можно, разумеется, продолжить количество примеров, подтверждающих принципиальную мысль о том, что выбор исходных абстракций, даже если он делается неосознанно, существенно определяет

метод и характер научных теорий. Но и сказанного, я думаю, достаточно, чтобы понять, что это никогда не могло бы случиться, если бы суть абстракции сводилась к простому психологическому акту отвлечения и если бы абстрактное само по себе было полностью лишено творческого, конструктивного начала.

В результатах абстракции выражается наше понимание реальности. А понимание реальности — это не копия реальности, а её субъективный образ, построенный в соответствии с наличными условиями и средствами познания и в известном смысле по нашей воле. Сознательная воля и творчество столь же существенны в этом образе, как и наша естественная способность к отражению данного содержания. Поэтому, вообще говоря, в абстракции сочетаются и теоретический и практический способы действий — *определенность сущим*, и *определение сущего* одновременно.

Секрет этой двойственности довольно прост. Абстракция начинается обычно с индукции, но когда она найдена и воплощена в понятие или теорию, гносеологическое отношение оборачивается — индуктивный путь, инициировавший абстракцию, заменяется дедуктивным путем от абстракции к ее моделям, то есть к тем явлениям, которые послужили, быть может, индуктивной базой для формирования абстракции и которые воспринимаются теперь как частные её реализации (примеры). Именно здесь проявляется новое важное качество познания через абстракцию, которое едва ли уловимо на индуктивном пути, — выявляется неоднозначность абстракции, её приложимость к существенно разным моделям. Иначе говоря, абстракция соответствует не только первоначальному опыту. В общем случае она — инвариант в классе опытов (моделей) различной природы. Неполная неполнота знания, обусловленная отвлечением, которое мы соединяем с понятием «абстракция», дополняется теперь его ненамеренной модельной насыщенностью (целостностью), обеспечивая тем самым и право на дедуктивный путь познания реальности, чтобы в нашем объяснении явлений мы могли двигаться дальше, например, могли объяснить более сложный опыт или получить данные опыта, которые не получишь, минуя абстракцию и теоретический путь познания. Так, описывая свой опыт с зеркалами, Френель замечает, «что лишь теория колебаний могла привести к идее постановки такого рода опыта. Этот опыт настолько труден, что почти невозможно, чтобы чистый случай на него натолкнул»¹¹².

В аксиоматизируемых теориях онтология не скрыта за ширмой абстрактных образов, а представлена в самих этих образах. Фиксируя в аксиомах определённые виды связей объектов, изучают при-

роду объектов с точностью до их определенных связей, то есть, по сути, как «переменную природу». Особенно это заметно в формальной аксиоматике, в которой условия, налагаемые на основные понятия содержательной аксиоматикой, сохраняются, но их уже не обязательно понимать как условия для данных конкретных понятий (как условия только одной ситуации!). Они могут относиться к любой ситуации, удовлетворяющей формальной аксиоматике. Однозначность теоретической онтологии проявляется в этом случае через однотипность абстрактных структур моделей, хотя мы и не требуем при этом изоморфизма самих моделей. Достаточно и того, что мы можем говорить о «законченной объективности» знания в интервале абстракций каждой данной структуры, поскольку об объектах «самих по себе», вне свойств, определяемых такой структурой, мы, как правило, ничего не можем сказать.

Важно, однако, то, что каждая научная теория, действуя избирательно, «онтологическую сигнатуру» предполагаемой действительности редуцирует в «онто-гносеологическую сигнатуру» соответствующей картины мира. При этом некоторые, возможно многие, элементы оригинала, индуцировавшего ту или иную теорию, уходят из образа оригинала, созданного научной мыслью, уходят просто как посторонние для теории, а следовательно, и для теоретической картины мира. Поэтому не приходится удивляться, если уже на другом пути мы наталкиваемся на эти отсутствующие в теории элементы. Но когда эти элементы и в самом деле оказываются посторонними для данной теории, то совершенно напрасно пытаться «вложить» их в эту теорию в целях мнимой её полноты¹¹³. Разумнее предположить, что в той «онтологической неполноте» научных теорий, которая обусловлена фактом независимости определенных явлений друг от друга — их, так сказать, взаимопосторонним характером, — мы имеем определенный объективный источник (основание) для логического развития научного познания и, в частности, для объяснения того, что связано с релятивностью научных понятий, с возможной исторической установкой на понимание.

ГЛАВА 3. АБСТРАКЦИЯ ПОСТОЯНСТВА

Не ропщите: всё проходит.

Е.А.Баратынский

Видимо, нельзя говорить о знании, если все вещи меняются и ничто не остаётся на месте.

Платон

3.1. Абстракция постоянства и повседневный опыт

К «миру переменных» мы привыкаем с детства. На непосредственном личном опыте мы постигаем мудрость пословицы: Всему бывает перемена. Позднее нам объясняют причины перемен, а иногда мы находим эти причины сами. И всё же мир переменных — это не единственный понятный нам мир. Вопрос о том, всё ли проходит, дополняется для нас вопросом о том, когда проходит.

И повседневный и научный опыт нас учит, что известная поговорка нуждается по крайней мере в таком уточнении: всему бывает перемена, если иметь в виду достаточный период времени. Слово «достаточный» здесь, конечно, неопределенно. В нашем разьяснении оно играет роль «ситуационной переменной», принимающей разные значения для разного опыта. Но главное, что оно выражает практическую суть дела: для любого явления (природы или нашего сознания) найдется период времени, в течение которого это явление можно считать (и мы на самом деле его считаем) постоянным. Иными словами, за некоторый период времени мы переменную можем рассматривать (и на самом деле её рассматриваем) как постоянную, полагая, что в этот период значения переменной тождественны.

Так, в частности, приходится поступать при решении «вычислительных задач, соответствующих отдельным этапам моделирования действий в среде, которая считается неизменной в течение некоторого интервала времени»¹⁴. Так мы переживаем и мыслим самих себя. Так возникает наше понятие о тождестве личности во времени. Ведь при этом, как об этом говорил ещё Фреге, речь идёт прежде всего о том, что́ должно узнаваться в изменении как *то же самое*: «Если государь стареет, он изменяется. Но, несмотря на изменение, его можно узнать

как того же самого государя. Если же, напротив, государь умирает и на трон вступает его преемник, то уже нельзя говорить, что первый превратился во второго, потому что новый государь не является тем, чем был старый государь»¹¹⁵. Мысль о необходимости для познания «условия постоянства» Фреге проводил с настойчивостью даже в самых математических своих работах: «Если бы всё находилось в состоянии постоянного изменения и ничто не сохранялось бы постоянным во времени, то не было бы никакой возможности получить знания о мире»¹¹⁶.

В соответствии с максимальной «всё течёт» мы принимаем идею преобразования, порождающего последовательность «образов личности», неотличимых, как мы знаем по опыту, в каждом весьма малом временном интервале, но в произвольном интервале, вообще говоря, существенно различных.

В том же смысле и эволюционный ряд для нас — это, по существу, только цепь суперпозиций таких преобразований, которые хотя и не являются тождественными автоморфизмами «в себе», но на том или ином участке этой цепи кажутся именно такими автоморфизмами. Говоря иначе, эволюционный ряд — это транзитивное замыкание преобразований, в которых последний член произвольной n -ой суперпозиции существенно неотличим от первого члена $(n+1)$ -ой суперпозиции. Нарушение транзитивности в этом процессе (когда мы это явственно наблюдаем) означает разрыв непрерывности, возможную смену направления развития, а возможно, и полный разрыв преемственности — революцию¹¹⁷.

Всё это позволяет считать, что свойственный нам повседневный взгляд на мир сопровождается *абстракция постоянства*. В частности, абстракция состоит в том, что любое явление, даже сам процесс изменения, когда мы о нём говорим или его изучаем, мы мыслим как функцию, постоянную в фиксированном временном интервале, то есть мы мыслим и судим о постоянстве этой функции не вообще, а только в некотором, для каждого явления, понятно, своём, временном интервале, в котором это явление «для нас» или относительно условий, существенных для суждения о нём, не претерпевает никаких изменений (производная постоянной равна нулю).

Было бы, однако, ошибочно полагать, что только отвлечённому мышлению свойственно прибегать к абстракции постоянства¹¹⁸. Говоря о постоянстве явлений как об абстракции, в противоположность реальному процессу их непрерывного изменения, мы ориентируемся, конечно, и на научный опыт, и на условия нашей повседневной жизни, важнейшим фактором которой, если эта жизнь складывается для нас благополучно, является её устойчивость.

Вообще говоря, мы охотно экстраполируем и универсализируем любой подходящий опыт. К примеру, мы универсализируем обычную (классическую) практику измерения времени, согласно которой его течение, «ритм времени» — физический инвариант¹¹⁹. Возможно, что для математика время и течение времени — это хороший пример потенциальной бесконечности, поскольку кажется, что «нельзя представить себе, что имеется какой-то самый последний момент времени, за которым уже совсем нет никакого времени»¹²⁰. Однако психолог или писатель по отношению к словам, взятым в кавычки, будут более осторожны. Они, быть может, даже возразят математику. Им-то хорошо известно, что выражения «время остановилось» или «самый последний момент времени» — вовсе не бессмысленные обороты речи. Это или отражение психического состояния, субъективный факт «переживания времени», в котором течение времени перестают воспринимать, перестают чувствовать себя во времени¹²¹, или же отделившее время от вечности возвышенное понимание жизни, достижение ею наивысшего момента, когда «она уже в вечности, для нее время остановилось»¹²².

Можно сказать, конечно, что такие психолингвистические возражения не касаются сути дела и не достигают цели, поскольку их легко отвести простым замечанием, что необходимо строго различать объективные и субъективные аспекты значений терминов. Но так ли уж абсолютно здесь, да и в других случаях, такое различение? Мысль, что «нельзя представить себе», и связанную с ней точку зрения, математик заимствует из той же психолингвистической практики употребления понятий и, не обращая на это внимания, возводит свою позицию в ранг общезначимой истины только потому, что она позволяет создать ему связную и далеко идущую систему абстракций, называемую математическим анализом. Но для психолога, писателя и, между прочим, для физика течение времени, вообще говоря, не является инвариантом. Поэтому вопрос о том, что можно и что нельзя себе представить, в этом случае остается открытым.

3.2. Абстракция постоянства и научный опыт

Когда какая-либо абстракция с успехом применяется в познании, разумно поискать объективные основания этого успеха. Субъективные основания для абстракции постоянства, очевидно, есть. В частности, абстракция постоянства освобождает организм от непосильной информационной перегрузки, которая неизбежна в случае различимости произвольно малых изменений в произвольно малые

интервалы времени. Но эта цель оказалась бы совершенно бесполезной для адаптации и не была бы достигнута, если бы постоянство явлений, отраженное в этой абстракции, было ложным изображением действительности, своего рода миражом, вызванным инстинктом самосохранения, субъективной активностью организма, но лишенной онтологической (реальной) основы. В том-то и дело, что истинность познания требует постоянства в объективной реальности не меньше, чем в её субъектном образе. Известные нам законы природы не только выражают инвариантность как абстракцию от изменяющихся явлений, но и предполагают инвариантность как условие самих явлений, как их объективную возможность или действительность, отражённую в законах. Вот почему, строго говоря, и суждение о непрерывной переменности (*panta rei*), опозитизированное Гераклитом, — это тоже абстракция, не более и не менее, чем абстракция постоянства.

Мы теперь равно говорим и о возрасте Земли, и о возрасте атома, почти не задумываясь над смысловым различием слова «возраст» в каждом из этих контекстов. Но в последнем мы слишком далеки от «естественной» семантики этого понятия. Очевидно, что наш внутренний опыт, связанный с индивидуальным старением во времени, с привычным свойством изменения во времени, существенно входит в наше понятие о возрасте. Так, если каким-либо образом удалось бы исключить для человека естественную возможность формирования понятия о времени на «внешней» (объективной) основе¹²³, то у него всё же осталась бы «внутренняя» (субъективная) основа для аналогичной оценки времени. Например, человек без труда смог бы различить предикаты «молодой» и «старый» по личным фотографиям, разделённым, скажем, промежутком в пятьдесят лет. Но атом, руководствуясь своим «внутренним опытом», этого сделать не сможет, если даже фотографии «молодости» и «старости» атома разделит промежуток в миллиарды лет — его образы на этих фотографиях будут точными копиями друг друга.

Наконец, основным аргументом и в пользу абстракций переменности, и в пользу абстракции постоянства являются законы сохранения, для которых с уверенностью доступной нам на сегодня теоретической оценки можно указать пока единственный временной интервал: $-\infty < t < +\infty$ ¹²⁴.

О какой бы переменности ни шла речь, не подразумевается, конечно, что эта переменность вообще произвольная, не подчиненная каким-либо законам. Посылка о закономерности лежит в основе наших индуктивных гипотез об изменении объектов, об их «поведе-

нии». По крайней мере, мы обычно не ожидаем, что, изменяясь, вещь перейдёт в другой род — в «чужой» таксон, лежащий на произвольной ветви развития. Я могу стать стариком, но, конечно, не могу стать женщиной. Иначе говоря, значения переменной, ожидаемые нами, с большой вероятностью должны лежать в заведомо определённом классе — в области её изменения, хотя этот класс и необязательно мыслить как актуально данный. К примеру, я ещё не стал стариком, а только могу им стать. В общем случае класс значений — это порождаемый класс. Он всегда в процессе становления. Соответственно и универсум должно мыслить *in statu nascendi*¹²⁵.

Итак, говоря о постоянстве явлений во временном интервале, я имею в виду и закон (характер) изменения значений соответствующей переменной, который тоже необходимо включить в этот интервал¹²⁶. Точнее, надо связать абстракцию постоянства и закон изменения явлений. Только в этом случае абстракция постоянства получит желаемый теоретический смысл. Только тогда можно будет говорить об *интервале абстракции постоянства* в собственном смысле.

Хорошим примером названной выше связи служит явление радиоактивного распада. Действительно, хотя излучая, вещество изменяется, для некоторых радиоактивных веществ скорость изменения начальной их массы (как функции времени распада) при этом столь незначительна, что путем обычного взвешивания (с наибольшей доступной нам точностью) изменения массы невозможно обнаружить ни в вековой, ни даже в тысячелетней практике человечества. И только закон радиоактивного распада (в его дифференциальной форме) уточняет интервал абстракции наблюдаемого постоянства массы для любого радиоактивного вещества. На основе этого закона можно заведомо указать (рассчитать) такой невырожденный временной интервал, в котором для каждого его момента изменение массы радиоактивного вещества фактически будет равно нулю. А это означает, что при любой заданной конечной точности измерения абстракция постоянства данной массы вещества в интервале этой абстракции обоснована как эмпирический факт. Как известно, этот интервал связан с постоянной радиоактивного распада и не зависит ни от каких прозрачных условий.

В своей замечательной книжке о времени Дж. Уитроу обсуждает гипотезу, согласно которой ни один материальный или идеальный процесс не может осуществиться за время, меньшее некоторой атомарной единицы времени — хронона¹²⁷. И если держаться феноменологического представления о течении времени как непрерывности, в которой «каждый определённый момент времени совершенно неуказуем»¹²⁸ (в которой,

следовательно, нет места для математического строго точечного «теперь»), то трудно удержаться от искушения и не релятивизировать хронон, истолковав его, равно как и психологическое «теперь», в смысле экспериментально подтверждаемого тезиса об интервале абстракции постоянства материальных или идеальных процессов. Тем более что названный тезис оправдывается также и теоретически представлением об *интервальной*, а не точечной *одновременности* в соответствии с принципом относительности одновременности¹²⁹.

3.3. Абстракция постоянства и закон тождества

Всё сказанное выше об абстракции постоянства носит откровенно философский характер и поэтому может показаться недостаточно ясным. Очевидно, первым нефилософским теоретическим выражением этой абстракции является закон тождества в логике — закон постоянства высказываний (или *принцип сохранности*¹³⁰): любая законченная мысль, представленная в форме высказывания и имеющая определенное истинностное значение, должна сохранять свою первоначальную форму и свое значение в явном или подразумеваемом контексте на протяжении всего процесса рассуждения (доказательства), в котором участвует это высказывание. Замечу, что, в отличие от общепринятой позиции и в соответствии с содержанием абстракции постоянства, я не хотел бы говорить о законе тождества как о *существенной идеализации* в процессах мышления.

Если речь идёт о высказывании A , то в языке логического исчисления указанную «сохранность» обычно кодируют формулой $(A \supset A)$. Сама по себе эта формула не означает, конечно, принятия A в качестве истинного высказывания: импликация $(A \supset A) \supset A$ не является общезначимой. Но если A принято, то необходимо принять и абстракцию постоянства (закон тождества) для A , поскольку формула $A \supset (A \supset A)$ — это уже общезначимая формула. Вообще слева от $(A \supset A)$ всегда можно написать конечную или же бесконечную последовательность префиксов вида « $A \supset$ », группируя скобки вправо от префикса. Замечательно, однако, что и для классической и для интуиционистской логики это сведение абстракции постоянства высказывания к принятию самого высказывания имеет более сильную форму следующей теоремы: если при допущении высказывания для него отрицается закон тождества, то тем самым отрицается и это высказывание. Или на языке исчисления: $A \supset (\neg (A \supset A) \supset \neg A)$. Сама по себе эта формула выглядит тривиальной. Интересно, однако, что она является (как я обнаружил) подстановочным случаем более общей теоремы $A \supset (\neg (B \supset A) \supset \neg A)$,

которую я позволил себе называть *формальным аналогом закона достаточного основания*¹³¹. По-моему, эта теорема является также сильным аргументом в защиту regressus ad infinitum против аристотелевской идеи аподейктического знания, поддерживая аргументы его противников (скептиков и мегариков), которые утверждали, что «ни одно положение (включая аксиомы и постулаты – *М.Н.*) не может приниматься за истинное, если не найдены другие, из истинности которых это положение следует»¹³².

В классической логике верна также формула $(A \supset \neg (B \supset A)) \supset \neg A$, а в интуиционистской – формула $(A \supset (A \supset \neg (B \supset A))) \supset \neg A$.

Предполагаемый изоморфизм логики высказываний и логики событий естественно приводит к онтологическому смыслу абстракции постоянства¹³³.

ГЛАВА 4. АБСТРАКЦИЯ ИНДИВИДУАЦИИ

Это потому, что никто не «один», но «один из». Мы так одинаковы...

Евгений Замятин, роман «Мы»

Tu wchodzi w grę sprawa indywidualności.

Stanislaw Lem, «Solaris»

Потребность в понятии «абстракция индивидуации» возникла у меня из соображений симметрии при изучении проблемы тождества¹³⁴. Но его также можно рассматривать как уточнение классических представлений о принципах индивидуации — одной из древнейших философских проблем об основах (причинах) неповторимости и уникальности любой природной субстанции.

4.1. Многое и одно

С первых же шагов опыт приучает нас к множественности явлений. И если говорить о мире явлений в целом, то даже приближённую величину этой множественности назвать невозможно, хотя, конечно, можно назвать величину множественности некоторых его фрагментов. Например, можно сказать, сколько букв русского алфавита на этой странице, сколько судоводных рек на земном шаре, сколько молекул в данном объеме любого газа и т. д., и т. п.

Поражая воображение, множественность явлений исстари побуждала разум к поискам объясняющих её причин. И на сегодняшний день накопилось достаточно гипотез такого рода, хотя история их никем, кажется, ещё не написана.

Уже милетских философов, которые принимали множественность явлений как факт, интересовал не столько сам этот факт, сколько его причины. Анаксимандр выводил множественность из вечно-го движения противоположностей, а Анаксимен — просто из движения, которое он тоже считал вечным.

В большинстве древних философских гипотез множественность явлений полагалась как «внешнее» и объяснялась каким-либо «внутренним» началом, называемым сущностью. При этом преобладали две установки. Согласно одной, как в концепции упанишад, у буддийских мадхьямиков или у элеатов, множественность объявлялась чем-то призрачным и иллюзорным, чем-то вроде сна наяву, вера в реальность которой подобна смерти¹³⁵. Согласно другой, как в философии милетцев и Гераклита, множественность считалась несомненной и объективной реальностью.

Выбор той или иной установки, по крайней мере для античных философов, существенно определялся гипотезами о строении материи. Пифагорейцам для этого служила абстракция пустоты. Элеаты отрицали пустоту, поэтому для них только сплошность и однородность материи были подлинной реальностью, а её множественность и дискретность объявлялись видимостью: бытие едино (непрерывно) в основе, но множественно согласно чувственному восприятию.

Наконец, гипотеза Левкиппа – Демокрита – Эпикура объясняла все качественные изменения и, следовательно, все видимое разнообразие явлений очертаниями, движением и положением атомов (например, характером их взаимной связи). Но если множественность наблюдаемых явлений сравнительно легко объяснялась гипотезой об атомах, то множественность самих атомов, ненаблюдаемых и неразличимых в силу их бесконечной малости, этой гипотезой уже, конечно, не объяснялась. Тем не менее, принцип атомизма, в отличие от других объяснений множественности, имел, как известно, собственно научную ценность. Он стал истоком долгого и трудного пути науки к познанию квантовых свойств материи. Философская идея об элементарных частицах материи, из движения и взаимодействия которых рождается разнообразие переходящих явлений природы, эволюционировала в конечном счете в математическую теорию квантовомеханических законов, лишней раз подтвердив, как часто строгие научные теории возникают из «смутно очерченных философских идей».

4.2. Проблема индивидуации

Однако я не вхожу в подробности этой темы. Меня интересует здесь другой вопрос, который зародился, по-видимому, вместе с проблемой множественности и в какой-то мере в зависимости от неё. Вопрос этот полезно разделить на два подвопроса: 1) имеются ли в данной множественности объектов и явлений универсума хотя бы

два совершенно одинаковых (тождественных в логическом смысле), или же все объекты и явления в ней объективно различны?; и 2) если речь идёт не менее чем о двух объектах любой данной множественности, то всегда ли можно указать на их качественное различие?

Оба эти подвопроса и составляют *проблему индивидуации*. А то, что эта проблема не совпадает с проблемой множественности, следует по крайней мере из принятой практики употребления понятий. Так, мы говорим, что все молекулы одного вещества одинаковы, и, тем не менее, называем число Авогадро, указывающее величину множественности молекул в моле любого газа. И хотя индивидуальность и множественность здесь не противопоставляются — оттого и множественность, что много индивидуальностей, — всё же очевидно, что в определённом смысле эти проблемы противоположны: множественность опирается на принципы подобия и воспроизводимости, индивидуация, напротив, — на принципы различия и неповторимости.

В известном смысле множественность не исключает тождественности, но индивидуация и тождественность, вообще говоря, не совпадают. К примеру, в физике микрочастиц говорят о системах из n тождественных частиц, называя тождественными частицы с одинаковыми признаками. Однако эти частицы настолько утратили свою индивидуальность, что не различаются (в отличие от героев романа Замятина) даже по номерам¹³⁶. Поэтому принцип тождества в квантовой механике должен отличаться от лейбницевского принципа тождества неразличимых, которым он хотел обосновать индивидуацию¹³⁷: тождество неразличимых исключает множественность неразличимых, а в множестве тождественных исчезает возможность индивидуации. Невозможность индивидуации (нумерической, равно как и всякой другой), с которой столкнулась квантовая механика частиц, замечательна уже тем, что речь в ней идёт не об абстрактных, а о вполне материальных объектах.

4.3. Немного истории¹³⁸

История античной и новой философии даёт первые полезные примеры для постановки проблемы индивидуации. Но я лишь вкратце затрону её исторический аспект — не для глубокого анализа, а только для наметки логической связи идей, заключённых в проблеме индивидуации *per se*, что в какой-то мере объяснит её преэминентность в рамках нынешней науки, позволит взглянуть на эту «проблему схоластики» как на современную проблему.

Индивидуация как принцип была введена стоиками по философским соображениям, близким к номинализму¹³⁹. Затем этот принцип в разных вариантах неизменно повторялся вплоть до Лейбница. Общепринятой формулировки этого принципа в источниках прошлого нет. Есть сравнения, наводящие (и почти одни и те же) примеры, толкования, которые едва ли могут удовлетворить претензии на строгое определение. Складывается впечатление, что идея индивидуации — это фундаментальная идея, которую надо не определять, а разъяснять, исходя из наших интуитивных представлений¹⁴⁰.

Возможные гипотезы, связанные с ответами на поставленные выше вопросы об индивидуации, ещё в эпоху средневековья (в средневековой догматике) получили название «принципа индивидуации» по одноимённому сочинению Фомы Аквинского (*De principio individuationis*). Но Аристотель, по-видимому, первый придал проблеме индивидуации собственно теоретическую постановку¹⁴¹. Для её решения в качестве индивидуализирующего начала он ввёл особую субстанцию, названную им материей, и свёл общую проблему к ответу на вопрос: каким образом неопределённая материя становится единичной вещью (индивидом)? Так как субстанциальность и единичность для Аристотеля совпадали, ответ на этот вопрос он предлагал в рамках низшего вида (*infima species*) только для материальных сущностей, отделяя чистый акт их существования (*subsistentia*) от их существования в определённой форме (*substantia*). И хотя, по Аристотелю, «сущность — то, чем материя становится» (а это «образ или форма»), всё же основание для индивидуации он видел не в форме, а в материи, ибо вид (форма), в отличие от материи, неделим и, следовательно, не способен к разнообразию. Форма создаёт различия видов, материя — различия индивидов. У индивидов (индивидуального) особый статус: индивидуальное как таковое неопределимо и даже непознаваемо (мы можем только его сохранить!) и его нельзя приписать (как предикат) ничему (никому) другому¹⁴². Между тем форма как сущность, как универсалия, допускает явное определение и принадлежит многим. Форма — это итог развития материи, предусмотренная высшим разумом для классификации вещей. Вполне возможны две вещи одной формы. Это означает, что они принадлежат одному виду. В этом случае мы вправе сказать: «вещь *x* такая же (*idem species*), что и вещь *y*». Но если речь идёт только о совпадении (тождестве) формы, то мы не вправе утверждать, что «вещь *x* — это та же самая вещь, что и вещь *y*». Понятие «тот же самый» равносильно понятию «единственный по числу» (*idem numero*), а такая единственность обусловлена только «мерой материи», свойственной каждой из телесных ве-

щей. И Аристотель (правда, не всегда последовательно) склонялся к тому, что своей индивидуальностью вещи обязаны материи, которая в каждой из них неповторима¹⁴³. Отсюда нетрудно заключить, что проблема индивидуации решалась им отрицательно. И поскольку *индивидуальное неопределимо*, индивидуацию необходимо принимать как эмпирический факт и не распространять на абстрактные (идеальные) объекты.

В поздней античности и в схоластике аристотелевский концептуализм обрастает элементами платонизма. К индивидам теперь относят уже не только материальные объекты, но и идеальные, например такие, как душа. И всё же проблема индивидуации ещё долго сохраняет контуры, данные ей Аристотелем, благодаря усилиям Фомы Аквинского, возродившего аристотелизм внутри христианской догматики. Правда, для идеальных объектов, являющихся чистыми формами без материи, взгляд на индивидуацию дополняется понятием о «субстанциальных формах», которое затем распространяется и на материальный мир, образуя своего рода триаду: вещь в целом (*quod est*); её субстанциальная форма (*quo est*); и акт творения, соединяющий то и другое. При этом материя перестаёт быть единственным началом индивидуации, разделяя эту роль с индивидуальной формой (Aquinas Thomas, *Contra Gentiles*, II, 50), так что всё индивидуальное предстаёт как сочетание «этой материи» и «этой формы». И Аквинский делает важное утверждение о роли проблемы индивидуации для науки и для теории познания: познаваемо лишь прошедшее индивидуацию¹⁴⁴.

Позднее, у Дунса Скота (следовавшего августиновской традиции), индивиды и их субстанциальные формы уже вовсе неразличимы. И хотя материя ещё признаётся субъектом возникновения вещи, сама по себе она познаваема только по аналогии с формой (Duns Scotus, *Opus Oxoniense, Commentarium...*, XII).

Последнюю точку в схоластической трактовке проблемы индивидуации поставил Уильям Оккам. Он возвращается к аристотелевским истокам. Факт существования вещи — вот для него основа индивидуации. Индивидуально всё, что существует, и именно потому, что это есть; а всё есть либо материя, либо форма, либо сочетание того и другого. Индивидуальную и универсальную природу вещи нельзя разделить. И хотя индивидуальное (особенное) не может быть универсалией, единичное (индивидуальное) познаётся только через общее (Ockham William, *Quodlibeta*). Нет надобности пояснять, что этот тезис Оккама столь же важен для теории познания, как и предыдущий тезис Фомы Аквинского. Позднее, касаясь того же вопроса об отношениях индивидуального (единичного) и общего, Николай Ку-

занский заметит, что, хотя знание единичного и знание общего всегда неполно и неточно, ошибка в знании единичного (индивидуального) неизменно больше, чем ошибка в знании общего.

Завершением схоластики был кризис её метафизики. Но хотя новая философия тяготела к научному обсуждению проблем, споры по проблеме индивидуации всё ещё продолжались в рамках схоластической антитезы «форма — материя». Так, Лейбниц, в частности, замечает, что, решая проблему индивидуации, он намерен «в известном смысле восстановить права древней философии и вернуть назад почти изгнанные субстанциальные формы»¹⁴⁵. Правда, теперь проблема индивидуации ставилась им и другими в иной концептуальной атмосфере и в условиях развитого естествознания и логики.

По примеру Аристотеля Лейбниц связывал проблему индивидуации с понятием об индивидуальной субстанции, которая по природе своей такова, что любое суждение о ней должно быть только аналитическим, а для этого необходимо обладать понятием индивидуальной субстанции во всей её полноте. Иначе говоря, понятие индивида должно включать в своё содержание все предикаты этого индивида. В связи с этим Лейбниц говорит о «безграничной тонкости вещей, заключающей в себе всегда и повсюду актуальную бесконечность»¹⁴⁶. И хотя Лейбниц принимает нечто вроде принципа «бесконечной детализации» по отношению к вещам, он отказывается от этого принципа по отношению к внутренней природе индивидуальных субстанций: индивидуальная субстанция структурно однородна, она не состоит из частей, хотя и может подвергаться превращениям. Каждая индивидуальная субстанция мыслится Лейбницем как монада, как замкнутый мир, в который нельзя проникнуть, но которая заключает в себе всё — это «живое зеркало вселенной». Поэтому никакие внешние отношения монад не могут повлиять на их внутренние свойства, по которым они «отделены» друг от друга. Универсум монад образует нечто похожее на хаусдорфово пространство, в котором понятие тождества (декларируемое принципом тождества неразличимых) относится только к внутренней топологии объекта и не касается топологии положения.

Лагерь сторонников противоположных идей составляли, как известно, последователи Исаака Ньютона, который считал, что скрытым свойствам не место в натуральной философии. Согласно Локку, одному из активных сторонников этой философии, тождество и различие вещей сводится к их положению в пространстве и во времени, а принцип индивидуации «есть само существование, определяющее предмету любого вида его время и место»¹⁴⁷. Следовательно, только

указанием «траектории»¹⁴⁸ можно эффективно обеспечить однозначность описания объекта, в то время как индивидуация по признакам либо слишком трудна, либо не даёт гарантии от воспроизведения подобных путём повторения свойств и порождающих их обстоятельств¹⁴⁹. По этим же соображениям, по-видимому, и Кларк в переписке с Лейбницем отвергал его принцип тождества неразличимых¹⁵⁰.

Возражения Лейбница и его сторонников, в свою очередь, сводились к тому, что признаковая индивидуация вполне правомерна и даже единственно возможна, поскольку пространство и время — это не внешние и априорные условия существования вещей, а только их модусы, которые сами определяются через индивидуальные вещи. Поэтому было бы порочным кругом ссылаться на пространство и время как на основу индивидуации.

Эти тезисы, каждый по своему, уязвимы для критики. К примеру, первый — в силу трансцендентного (основанного на абстракции актуальной бесконечности) характера индивидуации, не проверяемой в конечном опыте, в котором анализ признаков вообще не может быть доведён до конца, так что *de facto* не исключается возможность двух неразличимо сходных; а второй — в силу однородности пространства и неразличимости точек континуума.

Вообще же обе стороны вряд ли задумывались над тем, что признание существования индивидов правомерно поставить в зависимость от способов доказательства этого существования или, игнорируя эти способы, утверждать существование как следствие какой-либо *априорной гипотезы*, например, как следствие простой непротиворечивости понятия. Не случайно Лейбниц возвращается к аристотелевской метафизике, выдвигая по существу агностический аргумент: «мы не можем... найти способ точного *определения* индивидуальности... индивидуальность заключает в себе бесконечность, и только тот, кто в состоянии охватить её, может обладать знанием принципа индивидуации»¹⁵¹. При этом он толкует индивидуацию как предопределение, сочетая этот теологический аргумент с принципами тождества неразличимых и достаточного основания.

4.4. Индивидуация как абстракция

Итак, следуя схоластам, можно сказать, что проблема индивидуации — это проблема индивидуальной природы вещей. На вопрос: Что такое индивидуальная природа? — можно ответить, что она определяется индивидуальными свойствами вещи. Естественный новый вопрос: Что такое индивидуальные свойства вещи? — со времён той же

схоластической философии имеет общеизвестный ответ: индивидуальные свойства — это те, что отличают данную вещь от всякой другой, выражая «собственную сущность» этой вещи. Все последующие разъяснения сводятся тогда к вопросу о том, какие именно свойства необходимы и достаточны для индивидуации вещей.

Когда мы говорим, что существует объект с требуемыми свойствами, мы, конечно, не хотим сказать, что существует только один объект, обладающий этими свойствами¹⁵². Поэтому доказательство единственности следует поставить в связь с реальной возможностью (логики и практики) различений, с их осуществимой «отделённостью» друг от друга. Именно в такой связи индивидуация и предстает как абстракция, хотя в первом приближении она выглядит как очевидный эмпирический факт. И здесь мы вновь возвращаемся к вопросу о «началах индивидуации», об условиях, при которых индивидуация вообще возможна.

Можно предположить, что интерес к этому вопросу средневековой философии (реализма, концептуализма и номинализма) в немалой степени определялся стремлением осмыслить процесс познания. О новой философии это можно сказать с ещё большей уверенностью. И тем не менее, гносеологический аспект проблемы индивидуации, все они, как правило, обходили. Их подходы к решению этой проблемы объединяло одно — вера в онтологическую основу индивидуации: индивидуацию утверждали как следствие каких-либо априорных космологических гипотез о «природе универсума».

Следовательно, все высказанные выше классические гипотезы об основах индивидуации относятся к онтологии, то есть говорят не о том, как индивидуализируются те или иные объекты в нашем опыте, а о том, как они индивидуализированы «сами по себе», от природы, *in se*, поскольку это вообще имеет место. Такую индивидуацию естественно назвать *онтологической индивидуацией*: одну — координатной, другую — признаковой (или дескриптивной)¹⁵³.

Между тем то, что определено (индивидуализировано) «в себе», не обязательно определено как индивидуальное и для познания. Последнее возможно лишь при условии, что нам известна *энтропия индивидуального объекта*¹⁵⁴, а именно: то минимальное количество информации, которое позволяет утверждать, что мы действительно имеем дело с индивидуальным объектом. Поэтому с гносеологической точки зрения вопрос об индивидуации естественно связать с тем или иным информационным процессом, обеспечивающим индивидуацию, с тем или иным представлением объектов универсума «для нас»¹⁵⁵. Такая индивидуация «для нас» — я назвал её *гносеологической*

индивидуацией — должна выражаться в принципиальной возможности «вычислить» (в широком значении этого слова) или однозначно описать объект. И это весьма существенно, поскольку в гносеологической картине мира индивиды появляются, как правило, в связи с каким-либо их описанием. Более того, о некоторых (собственно научных) объектах без оговорок можно сказать, что они существуют только как индивидуальные концепты согласно способам (методам) их описаний. Таковы, в частности, абстрактные объекты научных теорий.

Самой простой и самой слабой характеристикой индивида является его имя. В ранние эпохи культурного развития именам придавался, правда, особый смысл: думали, что имя объекта исчерпывающим образом выражает его природу и модус его индивидуального существования. Позднее — под влиянием философии номинализма — наименование всё чаще стали воспринимать только как формальный, условный способ выделения объектов, который удобен для их классификации, но сам по себе совершенно непригоден для содержательного суждения об индивидах¹⁵⁶. Однако ещё позднее нашли, что если способ именования связать с каким-либо регулярным порождающим процессом, то из сравнения имён объектов можно извлекать определённую индивидуализирующую информацию. Примером может служить нумерация объектов (отвергнутая Лейбницем как способ индивидуации). Правда, «индивидуация номером» неэффективна, если она не основана на некотором законе и не позволяет порождать объект. В этом смысле процесс кодирования (например, формул по Гёделю) предполагает, что он идёт по некоторому правилу, сохраняющему индивидуальные свойства объектов (известные *до*) в их кодовых номерах.

Сколь общи и убедительны способы описаний, это, разумеется, особый вопрос. К примеру, если мы согласимся с Лейбницем в том, что любой индивид «в себе» бесконечен в своих качествах¹⁵⁷, а индивидуация требует анализа всех его качеств, то какая-либо эффективная процедура индивидуации будет невозможной. Действительно, пусть F — некоторое свойство (качество), а x — произвольный объект. Можно высказать в точности два утверждения о принадлежности F объекту x . Если таких (различных) свойств два, то утверждений будет уже четыре. Если их n , то утверждений будет 2^n . Иными словами, нам потребуются континуум утверждений для проверки принадлежности x счётно-бесконечного числа свойств (качеств). И ведь речь тут идёт об индивидуации только одного объекта.

Однако для индивидуации как абстракции достаточно, вообще говоря, минимальной индивидуализирующей информации. С этой точки зрения самой естественной формой индивидуации являются, по-видимому, индивидуализирующие описания, в частности, определения и дескрипции. В отличие от простых наименований, они дают информацию о «природе» индивида непосредственно, представляя в определённом смысле его «портрет». Ссылка на существование индивида, не подкреплённая эффективным способом его непосредственного узнавания, имеет, конечно, иной философский смысл.

Вообще, в связи с проблемой гносеологической индивидуации существенно «подвергнуть сравнительному изучению различные способы задания объектов»¹⁵⁸. Вопрос о таких способах и, следовательно, о той или иной абстракции индивидуации является принципиальным вопросом. Например, в арифметике индивидуация натуральных чисел задаётся, по существу, всеми аксиомами Пеано (за исключением аксиомы полной индукции, которая обеспечивает бесконечность множества уже введённых индивидов), а отношение тождества, которое используется в аксиомах для однозначного определения натурального ряда (как исходного множества) до введения основных операций на его индивидах, сводится к самотождественности, то есть является тождеством индивида только с самим собой¹⁵⁹. По существу, потребность в более широком понятии тождества (через абстракцию) возникает лишь при введении функций на универсуме моделей Пеано.

Разумеется, для эффективных форм индивидуации важна возможность конечной определимости индивидуальных объектов. При этом можно либо усиливать претензии к эффективности, требуя, чтобы индивидуация определялась каким-либо обще-рекурсивным или примитивно-рекурсивным процессом, либо, напротив, ослаблять эти претензии, допуская своего рода интуитивную определимость, основанную на нашей способности к селективному восприятию и узнаванию объектов (нечто похожее на *notitia intuitiva* Оккама). Но в современной математике немало и таких ситуаций, когда индивидуация невозможна без введения трансфинитных (неэффективных) понятий. К примеру, индивидуация математических объектов, неявно подразумеваемая аксиомой выбора, по своей трансцендентной сущности едва ли уступает средневековым космологическим гипотезам, недвусмысленно подтверждая уже указанный тезис Лейбница, что «индивидуация включает в себе бесконечность».

Сама эта лейбницевская идея выражала, правда, только часть истины, если учитывать порядки бесконечности. По словам Лузина, определение (индивидуация) вещественных чисел бесконечными пос-

ледовательностями рациональных является всего лишь скромной возможностью индивидуализировать счётную часть элементов несчётного континуума. А для случая проективных множеств (полученных из измеримых борелевских) ситуация, по свидетельству того же Лузина, такова, что вообще «нельзя ни назвать индивидуальную точку такого множества, ни узнать, «существуют» ли точки в таком множестве»¹⁶⁰.

4.5. Индивидуация и универсум

В научной картине мы, безусловно, субъективируем внешний нам (объективный) мир. Субъективируем не в том смысле, что, высказываясь о положении дел в мире, мы подчиняемся при этом только «внутреннему чувству очевидности», принимая образы научной картины как факты наших личных переживаний, а в том, что, познавая, мы необходимо следуем методу абстракции — мы релятивируем наши образы, привязываем их к точке наблюдения, к системе отсчета. В этом метод абстракции совпадает с методом центральной проекции. С переменной центра проекции меняется и картина. От оригинала в ней сохраняются неизменными только инварианты — те немногие свойства, которые не затрагиваются системой проективных преобразований. Таков же и гносеологический универсум любой научной теории. Он «как один и тот же город, если смотреть на него с разных сторон, кажется совершенно иным, и как бы *перспективно* умноженным»¹⁶¹. Разница лишь в том, что, хотя идея и цель отображения здесь как будто известны, само оно, вообще говоря, неопределенно, поскольку неопределенно множество его онтологических прообразов. Поэтому всегда и необходимо мы уточняем отображение тем, что принимаем в теории какие-либо гипотезы об онтологии, достаточно характеризующие ее для целей отображения. **Общая картина мира — это «мозаика», составленная из гносеологических универсумов, созданных нашей абстракцией.** Каждый образ этой картины привязан к определённой точке зрения, к условиям наблюдения, к системам отсчёта — к определённой интервальной ситуации. Соответственно и вопрос о гносеологическом смысле индивидуации, о том, как индивидуализируются объекты в нашем опыте, об объективном «в рамках опыта», это вопрос, решение которого связано с преобразованиями **онтологического универсума в универсум гносеологический** — в этот «второй круг», являющий нам «как бы наши очертанья»¹⁶². И эта философская суть дела не изменяется, конечно, от того, что гипотезы, связанные с преобразованиями подобного рода маскируются порой в математически точных абстракциях.

4.6. Индивидуация и множество

Эту тему возродили для современной философии науки Б. Больцано и Г. Кантор в связи с учением о множествах. К сожалению, её значимость для канторовской теории множеств в результате долгих «критических сражений» теперь уже почти забыта, и в литературе утвердилась мысль, будто канторовское понятие множества «не связывается с фиксацией каких-либо определённых способов индивидуального описания тех объектов, которые охватываются этим понятием»¹⁶³.

Объясняют это обстоятельство системой представлений, порождаемых абстракцией актуальной бесконечности. А это означает, что онтологическую индивидуацию в расчёт не принимают, а мыслят индивидуацию только как понятие гносеологическое, связанное с каким-либо эффективным заданием (указанием) элементов множества, о чём уже говорилось выше.

Но объяснить такую позицию можно и по-другому, имея в виду, что одним из основных принципов канторовской теории является принцип (аксиома) свёртывания, согласно которому, вообще говоря, для любого свойства можно рассматривать множество всех тех объектов (предметов), которые обладают этим свойством. Поэтому теорию множеств часто определяют как науку о произвольных множествах (классах или совокупностях) произвольных объектов.

Замечу, однако, что такое толкование взаимного отношения свойств и множеств характерно скорее для традиционной логики, в которой (по инициативе логиков Пор-Рояля) постепенно утверждалась объёмная интерпретация понятий. При этом собственное содержание множеств (классов) рассматривалось весьма поверхностно, сами множества однозначно не определялись и достаточно было только суждения о принадлежности того или иного объекта к «известному» множеству, о котором сохранялось весьма «размытое» представление.

Между тем канторовская теория множеств родилась на стыке логики и математики, и предметом изучения в ней стали множества математических объектов, а вовсе не объектов произвольной природы. *Для характеристики математических объектов индивидуация необходима*, и Кантор, конечно, это хорошо понимал, как понимал он и роль философии в решении проблемы индивидуации. «Я считаю, — писал он, — что *метафизика* и *математика* по праву должны находиться во взаимосвязи и что в периоды их решающих успехов они находятся в братском единении»¹⁶⁴.

Известно, что со времён Кантора, Дедекинда и Вейерштрасса теория множеств была положена в основу не только математического анализа, но и многих математических теорий, называемых теперь классическими (в том смысле, который это слово получило в исследованиях по основаниям математики), в частности топологии, различных разделов абстрактной алгебры, теории функций, функционального анализа и пр. В такой ситуации естественно должен был возникнуть вопрос об уточнении понятия «множество». Думаю, не ошибусь, если скажу, что, по мысли Кантора, отнюдь не любая совокупность объектов могла называться множеством, а только такая, объекты которой можно было считать индивидуально определёнными хотя бы в онтологическом смысле (в смысле абстракции онтологической индивидуации), то есть «внутренне определёнными» независимо от воли исследователя и даже от тех затемняющих обстоятельств, которые могут проистекать от «способов данности» нам этих объектов.

К примеру, у нас, конечно, найдётся достаточно оснований совокупность электронов рассматривать как «совокупность реальных объектов», а не фикций. Но эта совокупность вряд ли будет множеством по Кантору, так как здесь не обеспечивается (ни онтологическая, ни гносеологическая) индивидуация не только в силу принципиальных границ возможности наблюдения, но и в силу принципиального характера (природы) самих элементов.

Условие индивидуации элементов в качестве условия «быть множеством» является, по-видимому, первым из ряда всех последовавших затем (в эпоху аксиоматического оформления теории) условий, направленных на уточнение идеи множества. В нём неявно уже содержалось требование пересмотра интуитивного принципа свёртывания. Однако никакого конструктивного решения при этом не предлагалось. Бесконечные множества рассматривались в канторовской теории множеств посредством умозаключений такой же логической природы, как и умозаключения, применяемые при рассмотрении конечных множеств.

Индивидуация в форме, принятой Кантором, была гипотезой об онтологии. Именно гипотезой, поскольку она была основана на очень сильных абстракциях, на представлении об элементах множеств как объектах «самих по себе», то есть сводилась к «внутреннему свойству» множеств, независимо от тех предположений об отождествлении и различении, которыми руководствуются при построении этих множеств и их элементов. Выше я назвал такую индивидуацию онтологической индивидуацией.

И действительно, подобно Лейбницу и средневековым схоластам, Кантор обходит вопрос о гносеологическом смысле индивидуации. Он настаивает на необходимости индивидуации, но сознательно абстрагируется от эмпирической (в широком смысле) данности объектов как индивидов: сущность математики в её свободе, поэтому элементы множеств могут быть индивидуализированы в силу чисто логических оснований. Такими основаниями он действительно считал принцип исключенного третьего и абстракцию актуальной бесконечности.

В этом случае вопрос о гносеологическом смысле индивидуации не является, конечно, существенным: он игнорируется уже на первых шагах оформления классических абстракций, поскольку признание только гносеологической индивидуации существенно ограничило бы выразительные возможности теории. Но онтологическая индивидуация для теоретико-множественной математики остаётся важным философским принципом.

Напротив, в теориях, которые строятся на антропологических принципах (то есть идут от субъекта и его деятельности), например, в интуиционистской и конструктивной математике с их более слабыми абстракциями, в прикладной математике, в эмпирическом естествознании, где свобода допущений, как правило, ограничена условиями фактического построения объектов, роль индивидуации в гносеологическом смысле (я назвал её выше гносеологической индивидуацией) значительно возрастает: «Когда применяют выражение “совокупность реальных объектов”, имеют в виду, что объекты, из которых состоит совокупность, мысленно выделены из окружающей среды посредством непосредственного указания или посредством отчётливой характеристики их типа, что объекты, входящие в совокупность, существуют одновременно и устойчиво в течение некоторого промежутка времени и что они отчётливо отличимы друг от друга»¹⁶⁵. И поскольку в этом случае речь идёт только о гносеологической индивидуации, появляется соблазн выставить тезис, контрарно противоположный канторовскому: «...разнообразие множества не является его внутренним свойством... для точного определения разнообразия нужно указать наблюдателя и его способность различения»¹⁶⁶.

4.7. Индивидуация и логика

Повторю ещё раз, онтологический принцип индивидуации не содержит в себе никакого указания на то, как индивидуализировать предметы универсума или как они индивидуализированы «сами по

себе», поскольку это уже имеет место; он постулирует лишь далеко идущую абстрактную возможность индивидуации. В этом смысле принцип индивидуации отличается тем же характером, что и так называемые «чистые» постулаты существования. В самом деле, если индивидуация имеет место независимо от того, каким образом она устанавливается в опыте, пусть даже идеализированном, лишь потенциально осуществимом, если для множества индивидуация — это его внутреннее свойство, независимое от наблюдателя и его способности различения, если, говоря в наших терминах, онтологическая индивидуация не зависит от гносеологической, то она — своеобразный предмет веры. Кантор хорошо это понимал, указывая на недостаточность средств, которыми мы располагаем, для заключения о такой индивидуации во всех случаях. Но при этом он надеялся на яность понимания тех случаев, когда в математике имеет смысл пользоваться интуитивными принципами свёртывания и выделения (объёмности).

Вопрос о том, как индивидуализируются объекты в опыте, об объективном «в рамках опыта» — это уже гносеологический вопрос. Его решение необходимо связано с гносеологическими абстракциями отождествления и неразличимости и, как правило, со всякого рода ограничениями разнообразия онтологического универсума, с преобразованиями этого онтологического универсума в универсум гносеологический.

Конечно, эти преобразования не всегда приводят к ограничениям. Например, в арифметике каждому единственному натуральному числу из предполагаемого онтологического универсума их модели (гипотеза об однозначности натурального ряда!) ставится в соответствие бесконечное множество его тождественных прообразов, образующих своеобразный гносеологический универсум этих теорий — мультимножество на онтологическом универсуме. Но это лишь кажущееся увеличение разнообразия онтологии. Оно снимается факторизацией — введением отношений тождества через абстракцию на множестве объектов из этого гносеологического универсума. В этом случае цель тождества — сохранить исходное онтологическое разнообразие и индивидуацию, заданную аксиомами Пеано.

Онтологическая индивидуация (её философский вариант) обычно формулируется как принцип Лейбница — Больцано: во вселенной нет двух совершенно равных, т.е. тождественных, вещей. Эта формулировка тесно связана с тем, что я называю **абстракцией актуальной различимости**¹⁶⁷, то есть с таким истолкованием индивидуации, при котором для любых *двух* предметов постулируется существование разделяющего их условия. В переводе на язык логики это выглядит следующим образом:

$$\exists P (P(x) \& \neg P(y)).$$

Однако при $x = y$ это утверждение противоречиво.

Следовательно, в понятии «два предмета» уже должно заключаться представление об их различии, и это представление может быть выражено соответствующей формулой логики:

$$\neg(x = y) \supset \exists P (P(x) \& \neg P(y)).$$

Но тогда очевидно, что индивидуация определяется через тождество, а это нежелательно, если мы хотим взаимной независимости этих понятий. В свою очередь, замена $\neg(x = y)$ на первую формулу индивидуации приводит к тавтологии, и, следовательно, не годится для характеристики объектов универсума.

Полученное затруднение показывает, что вопросы, связанные с преобразованием произвольных совокупностей в множества, помимо прочей, имеют и чисто логическую природу: невозможно сформулировать логически непротиворечивое утверждение об индивидуации (задать условие единственности) без понятия о тождестве. А если иметь в виду, что понятие о тождестве нередко само оказывается далеко идущей абстракцией или следствием абстракций отождествления и неразличимости, то уже невозможно отрицать, что универсум является гносеологическим понятием, зависящим от наших абстракций. Это означает, между прочим, что онтологически заданный мир вещей и гносеологически воспринятый мир вещей могут не совпадать. Для философии это, конечно, не новость.

Чтобы обойти связанные с этим трудности, принцип индивидуации удобно представить как принцип логический, как обязательное логическое условие познания, выбрав в качестве логического эквивалента этого принципа *самотождественность*¹⁶⁸. Это избавит от необходимости всегда обращаться к доказательству существования различных или к постулату о ненулевом (большем единицы) разнообразии универсума. Последнее (возможно, оттого, что оно индусируется каждодневным опытом) выглядит тривиальным. Но кодирующая его формула $\exists x \exists y \neg(x = y)$, формально недоказуема в чистой первопорядковой логике с тождеством. Классическое отрицание этой формулы, то есть суждение о нулевом разнообразии универсума, также недоказуемо в этой логике. Это означает, что логическая теория тождества, основанная на стандартных (гильбертовских) аксиомах, семантически неполна относительно возможных фактических ситуаций, связанных с индивидуацией и всякого рода отождествлениями.

Иначе говоря, мы не можем принять в качестве чисто логических принципов ни универсальное утверждение о тождестве всех объектов универсума, ни универсальное отрицание их тождества, ни даже утверждение о существовании различных. Вот почему я не могу согласиться с утверждением, что различимость объектов, принимаемая нами вместе с принципом индивидуации (независимо от того, об универсуме какой теории идёт речь), «основывается на чисто логических, а не на чувственно-созерцательных условиях»¹⁶⁹.

Но, принимая индивидуацию как самотождественность, мы уже на чисто логическом основании получаем утверждение о существовании тождественных объектов (доказательство этого утверждения тривиально). И с этим, едва ли не очевидным, следствием логической теории тождества полностью согласуется концепция *тождества в интервале абстракции*.

Я сошлюсь здесь на два примера, поясняющих эту мысль. Один пример из физики, другой — из математики.

4.8. Индивидуация и квантовая неопределённость

Возможность координатной индивидуации электронов, по существу, утрачивается при вероятностной интерпретации (квадрата модуля) волновой функции, поскольку в этом случае утрачивается представление об их однозначной пространственно-временной локализованности. Точный электрон заменятся размытостью очень малых размеров. Правда, этим ещё не перечеркивается принципиальная возможность мыслить точечную локализованность электрона как некую объективность. Например, в работающем кинескопе мы ещё можем говорить о траектории пути электрона, поскольку в этом случае неопределённость координаты $\Delta x \approx 10^{-5}$ см. Однако принцип неопределённости (ограничения точности наблюдения) указывает на экспериментальный (и в этом смысле вполне объективный) предел пространственно-временной локализации электрона с точностью $\Delta x \approx 0,5 \times 10^{-13}$ см. Неразличимость электронов при рассеянии является следствием этого факта.

Но если идея координатной индивидуации электронов, вообще говоря, теряет смысл, то идея признаковой индивидуация остается, хотя индивидуация здесь будет уже не онтологическая, а гносеологическая, основанная на понятии о волновой функции (Ψ -функции), являющейся математическим представителем физически наблюдаемых свойств электрона и, следовательно, абстракцией, однозначно описывающей электрон с точностью до квантовых состояний. В этом случае индивидуализируются не электроны, а их квантовые состоя

ния — «состояния движения» электронов, и, таким образом, отпадает потребность в обращении к какой-либо абстракции бесконечности, так как состояния движения электронов полностью определяются конечным набором квантовых чисел. Остается только одна абстракция, а именно та, согласно которой электрон отождествляют с его квантовым состоянием. Интервал этой абстракции предусмотрен соотношением неопределенностей. Последним и подчеркивается принципиальная важность различия между координатной индивидуацией и признаковой. При этом естественно приходит на ум возражение Канта против принципа тождества неразличимых на том основании, что «физические места совершенно безразличны к внутренним определениям вещей»¹⁷⁰.

Так ли это? — вопрос дискуссионный. Кажется, однако, что пространственное положение электронов отнюдь не безразлично к их наблюдаемым свойствам (к их поведению). Об этом нам говорит другой основной принцип квантовой механики — принцип запрета (или, по выражению Германа Вейля, «странный принцип Паули»), связывающий свойства электрона с его отношением к определенному месту в пространстве — к квантовому состоянию в атоме, а также проверка теоремы Белла, показавшая, что «предположение, что две частицы можно рассматривать как изолированные и независимые физические объекты только потому, что они движутся на большом расстоянии друг от друга, в корне ошибочно»¹⁷¹. По-видимому, всё это только указывает на полноту квантового описания с помощью волновой функции, а точнее, — на равносильность онтологической и гносеологической индивидуации электронов, если только верно, что выполнение принципа Паули для каких-либо микрообъектов влечет полное совпадение наблюдаемых свойств этих объектов и, таким образом, однозначно определяет их универсум как множественность неразличимых.

Любопытно, что как раз на основании этой неразличимости Фейнберг уличает лейбниевский принцип тождества неразличимых в ложности¹⁷², а Вейль, напротив, на том же основании говорит об истинности (подтверждаемости) этого принципа¹⁷³. Разгадка состоит, по-видимому, в неопределённой формулировке самого принципа. Я убеждён, что Лейбниц отделял проблему наблюдаемой неразличимости от проблемы тождества (о чём свидетельствует и Кант), хотя и называл свой принцип тождеством неразличимых. Неразличимость в его толковании имела не гносеологический (феноменальный), а онтологический (ноуменальный) смысл. Поэтому, говорит Кант, этот «мнимый закон Лейбница есть не закон природы, а только аналитическое правило для сравнения вещей посредством одних лишь поня-

тий»¹⁷⁴. Но Кант, видимо, не понял, что принцип тождества неразличимых был для Лейбница (равно как и для стоиков) всего лишь другим выражением принципа индивидуации.

4.9. Индивидуация и парадокс Ришара

Для математики, в отличие от физики, абстракции имеют безусловную значимость. Они её предмет, её начала и её метод. Математическая реальность «открывается» в том же смысле, в каком посредством абстракции она «создается». Природная реальность значима здесь лишь постольку, поскольку её структуры представимы средствами математических структур и, таким образом, служат практическим подтверждением объективной ценности математических абстракций. Само собой понятное и безусловное для физики разделение универсумов на онтологический, принадлежащей природе, и гносеологический, принадлежащий физической её картине, для математики становится условным. И тот и другой универсумы (как и индивидуация элементов в них) создаются здесь какой-либо абстракцией, дополненной столь же абстрактной «конструкцией» их элементов. Возможно, что это набор вычислимых функций, возможно, — понятие предельного перехода или нечто родственное им. Словом, онтологический универсум чистой математической теории нельзя считать данным от природы, предпосланным теории независимо от её абстракций. Но его нельзя считать и всецело посюсторонним, открытым для гносеологической индивидуации *всех* его элементов.

К примеру, одна из задач классической процедуры «сечения», принятой в основах анализа, — индивидуализировать каждую точку пространственной прямой, представить однородную «бесточечную протяженность» как точечное множество индивидов, сопоставив каждому индивиду его «числовой образ». А для этого приходится обращаться к трансфинитным теоретико-множественным абстракциям, только благодаря которым гносеологически неиндивидуализируемые элементы «реального континуума» преобразуются в индивиды абстрактного континуума вещественных чисел.

Естественно, что индивидуация здесь мыслится без какой-либо опоры в конструктивных условиях опыта. Это онтологическая индивидуация, если допустимо говорить об онтологии, основанной на совокупности абстрактных гипотез. Но именно под влиянием этих гипотез сформировался взгляд на равносильность двух континуумов —

эмпирического и теоретического, что, конечно же, не является ни эмпирическим, ни теоретическим фактом, а служит философским постулатом¹⁷⁵.

Итак, полагая в основу теоретико-множественной точки зрения на континуум абстракцию множества, говоря, что любое множество однозначно определяется его элементами (аксиома объёмности), подразумевают, что вопрос об индивидуации элементов множества заведомо разрешён, то есть, что все элементы множеств как-то определены «индивидуальным образом», так что целое — множество — «возникает» из его индивидуализированных элементов в мысленном акте их объединения.

Между тем во многих математически важных случаях индивидуация элементов универсума или его частей и их элементов — это глубокая и трудная проблема. И хотя в анализе, как уже сказано, её условно принимают за решённую, берут как предпосылку, как исходную абстракцию, как постулат математических рассуждений, этим не всегда удаётся избежать противоречий. Об этом можно судить по известному рассуждению Ж. Ришара, приводящему к парадоксу, названному его именем¹⁷⁶. Этот парадокс особенно выделял А. Пуанкаре как яркий пример порочности теоретико-множественных непредикативных определений. Но меня интересует здесь его другая, семантическая, сторона, его связь с понятием семантической определимости¹⁷⁷ и, соответственно, с той ролью, которую в содержании этого парадокса играют абстракции онтологической и гносеологической индивидуации.

Рассуждение Ришара начинается с выяснения вопроса о конечной определимости вещественных чисел посредством конечного множества слов, для чего используется счётно-бесконечное множество слов в некотором алфавите. Назовём его множеством *E*. Очевидно, что, хотя в *E* будут входить и бессмысленные сочетания слов, в нём будет также представлено словами всё, что может быть осмысленно высказано с помощью конечного множества слов, в том числе и счётное множество всех конечных определений вещественных чисел.

Поскольку анализу подлежат только эти числа, естественно постараться вычеркнуть из *E* все посторонние словосочетания, не являющиеся конечными определениями чисел. И Ришар говорит: вычеркнем из *E* все словосочетания, которые не являются такими определениями, и тогда оставшуюся часть можно будет упорядочить в счётную последовательность конечно определимых вещественных

чисел. И это будет последовательность, содержащая *все* вещественные числа, которые можно определить с помощью конечного множества слов.

Ясно, что решение этой задачи предполагает онтологическую индивидуацию *всех* точек числового континуума (о чём уже говорилось выше) и в этом смысле априорную информацию о каждой из этих точек. Ведь не зная наперёд всех элементов континуума, мы не сможем ответить на вопрос, какое из словосочетаний из *E* является определением вещественного числа, а какое нет. А без этого невозможно вычеркнуть все посторонние словосочетания из *E*. Иначе говоря, условие парадокса (и, на мой взгляд, это очень важный момент!) предполагает заведомое знание вещественных чисел «самих по себе», поскольку процесс вычеркивания посторонних словосочетаний предполагает идентификацию вещественного числа с его описательным определением, а «идентифицировать можно лишь то, что уже известно»¹⁷⁸. Таким образом, первой предпосылкой парадокса Ришара является *абстракция онтологической индивидуации* вещественных чисел. Решая задачу о составлении последовательности всех конечно определимых вещественных чисел, мы должны допустить, что понятие «множество всех вещественных чисел» имеет смысл, независимый от их конечной гносеологической определенности.

Но допустим, что процедура вычеркивания разрешима, что мы обладаем своего рода алгоритмом, позволяющим «просеять» все те буквенные размещения (из множества слов), которые не определяют вещественных чисел. Можем ли мы в этом случае с полной уверенностью сказать, что в результате процедуры просеивания (вычеркивания посторонних словосочетаний) получается последовательность *всех* определимых вещественных чисел? Построение вещественного числа, конечно-определимого, но не входящего в эту последовательность (а в этом-то и состоит парадокс), даёт отрицательный ответ. И как заметил уже сам Ж. Ришар, это немедленно наводит на мысль, что процедура вычеркивания (просеивания) не является эффективной (алгоритмически разрешимой), так что множество *E* не является вполне определенным (перечислимым) множеством¹⁷⁹.

Идея проводить существенное различие между понятием эффективной перечислимости и классическим понятием счётности принадлежит Э. Борелю. В различении этих понятий он видел решение парадокса Ришара. И хотя Борель не исключал индивидуацию элементов классически счётных множеств, он, по-видимому, не слишком ценил такую индивидуацию ввиду её трансцендентного

характера. Зато с понятием эффективной перечислимости он связывал своеобразный «принцип наблюдаемости». Преимущество этого понятия он усматривал в его меньшей метафизичности, поскольку оно опирается исключительно на наблюдаемую реальность¹⁸⁰. Правда, Борель не выделяет гносеологическую индивидуацию в связи с этой наблюдаемой реальностью, как и вообще не делает различия между онтологической и гносеологической индивидуацией. Но путь к понятию «вычислимых точек» континуума был всё-таки намечен. Как заметит позднее Вейль, классическому «понятию точки континуума недостаёт опоры в наглядном созерцании»¹⁸¹.

Хотя абстракция онтологической индивидуации не обеспечивается эффективным методом ее проверки, все же исключить её из практики математического мышления, по-видимому, невозможно. Ограничения, связанные с использованием абстракции гносеологической индивидуации, являются большими, чем это может показаться на первый взгляд. Теперь очевидно, что даже в конструктивном вещественном континууме онтологическая индивидуация неизбежна, поскольку, проблема разрешения для вопроса о равенстве или неравенстве его вычислимых точек (к чему, собственно, и сводится их гносеологическая индивидуация) является неразрешимой¹⁸².

Следовательно, проводить различие между онтологической индивидуацией и гносеологической необходимо и в математике. И это различие должно быть связано с тем смыслом, который мы придаем в ней глаголу «существовать». Гносеологическая индивидуация подразумевает конструктивный смысл существования объектов, эффективную осуществимость их сравнения. Онтологическая индивидуация, напротив, довольствуется классическим смыслом глагола «существовать», связанным с принципом исключённого третьего, и предпосылкой о сравнимости объектов «самих по себе» или «в себе», поскольку смысл существования в этом случае полностью совпадает с той ролью, которой мы наделяем кванторы в классической логике. Именно в этом случае принято говорить, что математическая реальность существует «сама по себе», хотя по отношению к таким абстрактным объектам, как, например, точки, прямые, плоскости и пр., сама идея такого существования представляется вряд ли приемлемой.

Всё дело в том, что логика выясняет вопросы «существования» в их *относительном* смысле, привязывая свои ответы на них к определенным способам рассуждения, к тем или иным способам задания объектов универсума, или, как говорит Н.Н. Лузин, к *полю законов*, «по отношению к которому констатируются “существование” и “не

существование” математических объектов”¹⁸³. Перенос этого смысла на область философской онтологии не является делом логики. Считать ли классическую логику «логикой бытия», а конструктивную «логикой знания» — это вопрос философии, вопрос гносеологической установки. И в том и в другом случае система объектов математической теории, применяющей логику, будет определяться характером соответствующей логики, то есть чисто математическая реальность, а следовательно, и вопросы существования и индивидуации в ней будут зависеть от законов и правил этой логики.

4.10. Индивидуация и информация

Подобно предыдущей, эта тема имеет определённый философский аспект. Для меня он «обозначился» ещё в 60-ые годы, с одной стороны, утверждением Н. Винера, высказанным им в эпоху «кибернетического расцвета», а с другой — романом Ст. Лема «Солярис», в котором, как мне, по крайней мере, тогда казалось, прозвучал на это утверждение недвусмысленный и отрицательный ответ.

В контексте предыдущих рассмотрений можно подумать, что проблема индивидуации является чисто лингвистической проблемой: как найти такие подходящие языковые средства, чтобы недвусмысленно и однозначно описать объект, выделить его как индивид, как сущность, отличную от всякой иной сущности. И в такой постановке проблема индивидуации действительно стала предметом обсуждения в школе сторонников эффе́ктивизма — философского направления в основаниях математики, ставившего своей задачей переосмысление «платонистской» концептуальной основы канторовской теории множеств с точки зрения принципов эмпиризма.

Мы помним, однако, что Аристотель суть проблемы индивидуации и главную её трудность видел в её онтологической (субстанциальной) постановке — «раскрыть» индивидуальное как внутреннюю структуру (энтелехию) объекта. В принципиальной невозможности это сделать усматривал Аристотель неразрешимость проблемы индивидуации. Позднее Лейбниц, восприняв этот взгляд, «упрягал» индивидуальность в свои монады, не только полностью исключив возможность её внешнего наблюдения и познания (монады не имеют «окон»), но и придав индивидуальности сугубо идеальный характер. Отсюда, в сущности, только шаг до концепции Юнга, определившего индивидуацию как сугубо внутренний процесс (внутреннее начало) реализации личности.

Я не случайно заговорил о личности. Думаю, что прежде всего к ней (а не к животной природе человека) относится упомянутое выше следующее утверждение Н. Винера: «в принципе возможно переслать человеческое существо по телеграфу», и хотя «эта идея может оказаться практически неосуществимой, но это не значит, что из-за этого её невозможно постичь»¹⁸⁴.

Ясно также, насколько эта идея и возможность её постичь связаны с решением проблемы индивидуации: в принципе переслать можно, если в принципе возможна абсолютная информационная и дескриптивная индивидуация личности. Но если индивид — это некая континуальная сущность, то для её онтологической индивидуации (а только такая индивидуация и является в данном случае решением проблемы) потребуется бесконечная информация. Поэтому уточним, что в принципе можно переслать по телеграфу любое существо в пределах полноты и точности его описания, или, иначе, — переслать по телеграфу феномен этого существа в пределах его гносеологической индивидуации. Только это и удалось осуществить такому «электронному монстру», как Океан в лемовском романе «Солярис».

Ответ на вопрос о возможной индивидуации значительно упрощается, если «нас интересует... количество информации в индивидуальном объекте x относительно индивидуального объекта y »¹⁸⁵. В этом случае речь идёт об *относительной индивидуации*, и не исключено, что таким путём мы придём к конечной неразличимости x и y (я говорю в этом случае — к абстракции неразличимости). Такова, по-видимому, ситуация с электронами в квантовой механике: любые два электрона с *информационной точки зрения неразличимы*. Естественно, что при этом допустимо говорить о «количестве информации, необходимом для указания объекта x при заданных требованиях к точности указания»¹⁸⁶. Но не стоит обольщаться исключительностью квантовой теории и утверждать, что понятие о тождественных частицах, — это понятие «чисто квантовомеханическое»¹⁸⁷. Мы помним, что Аристотель рассматривал проблему индивидуации в рамках вида. Важность именно такой постановки вопроса стала очевидной и в квантовой теории, которая дала отрицательный ответ на вопрос о возможной индивидуации элементов внутри вида (квантового состояния системы частиц), заявив себя как теория видовых свойств. Место индивида в квантовой теории заступил абстрактный объект — волновая функция, являющаяся абстрактным представителем элементов ансамбля.

ГЛАВА 5. АБСТРАКЦИЯ ОТОЖДЕСТВЛЕНИЯ

Знать что-нибудь, значит отличать его от всех, отличных от него, и отождествлять со всеми, сходными с ним

Александр Бэн, «Душа и тело»

На содержании понятий «отождествление» и «различение» следует остановиться хотя бы потому, что любой процесс познания попросту неотделим от соответствующих им операций мышления, — от *различения*, поскольку эта способность нашего ума есть самое необходимое «из всего, что только может вести к истинному познанию»¹⁸⁸; и от *отождествления*, поскольку «в основе всякой «абстракции» лежит акт отождествления, идентификации»¹⁸⁹.

5.1. Различение

Возможно, Кант первый усмотрел в различении два гносеологически несовпадающих акта: «одно дело *различать* вещи и совсем другое — *познавать различие* между вещами»¹⁹⁰. Только последнее представляет собой логический акт, выражаемый в *суждении различия*, которое, согласно Канту, всегда является отрицательным суждением: «вещь *A* не является вещью *B*».

Это, конечно, так, когда отношение различия мыслится (и определяется) в узком смысле как отрицание равенства. Однако для различия в широком смысле это, по-видимому, не так. Различие каких-либо объектов в широком смысле означает, вообще говоря, их несовпадение по некоторым (дискриминирующим) признакам (свойствам), так что факт различия по этим признакам не исключает сходства объектов по другим признакам. Поэтому для различия в широком смысле более адекватной следует считать положительную форму выражения с помощью суждения «*A* другое, чем *B*». Если «*A* не есть *B*», то *A*, конечно же, другое, чем *B*. Но обратное, вообще говоря, неверно. Так,

можно сказать, что формула ($a \supset b$) другая, чем формула ($\neg a \vee b$). Это факт их *положительного различия*. Но (если только не иметь в виду графическое равенство) нельзя утверждать неравенство этих формул, поскольку они представляют одну и ту же функцию истинности — и это факт их *положительного неразличия*. Иными словами, предикаты «быть другим», «быть таким же» и «быть тем же самым» должны быть привязаны к некоторой точке зрения, чтобы их содержание стало определённым.

Тонкость ситуации, с которой сталкивается тут наше мышление, была отмечена ещё Расселом, когда он писал, что различие «может быть естественно определено как отрицание тождества; но этот приём, хотя он и приемлем для формальной логики, трудно согласуется с тем замечанием, что обычно мы принимаем различие за основное понятие»¹⁹¹.

Эмпирический факт независимости способа распознавания различия от способа распознавания тождества (равенства) позднее нашёл выражение в концепции интуиционистской и конструктивной математики и, в особенности, в концепции математики без отрицания, выдвинутой голландским математиком Гриссом¹⁹², которого отказ от отрицания привёл к необходимости принять различие как основное (интуитивно ясное) отношение наряду с тождеством, и более того, считать последнее логическим следствием определённых свойств отношения различия.

Очевидно, что для Канта различие было не основным понятием, а производным от тождества (равенства), что несколько не должно удивлять в свете современной практики употребления этих понятий¹⁹³. Удивляет скорее то, что автор трансцендентальной философии не обратил внимание на гносеологическое несовпадение элементов триады «различное — различимое — различённое» и не проанализировал их. Между тем различное не обязательно различено, а различённое не обязательно различно¹⁹⁴. В то же время предикат « x отлично от y » можно мыслить и как выражение изначального отношения двух объектов, различных «самих по себе» (как *онтологический* предикат), и как следствие принятого предиката « x различено от y » (то есть как *гносеологический* предикат). Например, когда речь идёт о различии вещественных чисел в классической математике (по результатам сравнения десятичных знаков в рамках абстракции актуальной бесконечности), тогда предикат различия берётся в онтологическом смысле. Напротив, в интуиционистской и конструктивной математике (когда различие утверждается по результатам сравнения в рамках абстракции потенциальной осуществимости), предикат различия мыслится как гносеологический, поскольку та-

ков именно статус у предикатов « x отличимо от y » и « x отличено от y », причём, если x отличено от y и этот акт обоснован, то x , конечно же, отличимо от y , хотя обратное, вообще говоря, неверно.

5.2. Отождествление

Всё это так или иначе надо принять во внимание, когда мы касаемся проблемы отождествлений, причём именно проблемы отождествлений, а не проблемы тождества. Мы отождествляем вещи или явления, если не находим оснований для их различения (или находим достаточные основания для их неразличения). Говоря иначе, мы отождествляем тогда, когда мы заведомо отвлекаемся от различий, независимо от того, делаем ли мы это по своей воле или в силу каких-либо объективных причин. При этом существенны по крайней мере два случая: один, когда вопрос об отождествлении сводится к вопросу об эмпирических возможностях отвращения от различий в рамках каких-либо гносеологических ограничений на различимость (например, по результатам «сенсорной диагностики» измеримых свойств объектов); и другой, когда вопрос об измеримых свойствах игнорируется (или не ставится), и возможность отвращения от различий мыслится чисто теоретической в рамках какой-нибудь подходящей абстракции.

В первом случае любые два достаточно близких (и, возможно, различных) объекта отождествляются, если их достаточная близость не превышает пороговой точности различения (наблюдения, измерения). В этом случае, как когда-то заметил Боэций, о «познаваемом составляется суждение не согласно его (познаваемого — *М.Н.*) собственной силе, а согласно способности познающего»¹⁹⁵. Во втором случае, уточняя логику одинаковости (отношений типа равенства), обычно без оговорок устраняют «неточности», свойственные эмпирическому опыту. В частности, мысленно устраняют всякую зависимость равенства (одинаковости) от тех последствий различения «с точностью до», которые делают равенство истинной факта, а не истиной разума. Это — идеализация опыта, и делается это потому, что с формальной точки зрения принять редукцию равенства к неразличимости, не впадая при этом в противоречия или не ослабляя логический смысл понятия равенства, мы, вообще говоря, не можем. Именно формальная точка зрения вынуждает нас терпеть симбиоз априорных и апостериорных понятий и, говоря об одинаковости как рефлексивном, симметричном и транзитивном отношении, убеждать себя в том, что и одинаковость и различие «мы определяем при этом на глаз»¹⁹⁶.

Вопрос об отождествлении и вопрос о распознавании тождества — это, вообще говоря, разные вопросы. В самом деле, на основании каких источников мы судим о заданности тождества на множестве объектов теории? Один ответ заведомо прост: если универсум теории устроен как «множество по Кантору», то а priori в нём определена индивидуация и, следовательно, *самотождественность*. Однако всё остальное — дело абстракции, так что речь может идти только о *тождестве через абстракцию*. При этом и объективный факт тождества объектов, и субъективный акт их отождествления естественно рассматривать как независимые: коль скоро речь о субъективных актах, то возможно (и допустимо) отождествление объективно нетождественных (неузнавание различия) или, напротив, — различение объективно тождественных (неузнавание тождества).

Вводя понятие о тождестве через абстракцию (отождествления), вопрос о подстановочности тождественных, об условиях замены равного равным приходится решать особо. Правило замены в этом случае будет *производным по отношению к абстракции*, а не прямым. Применяя абстракцию отождествления, необходимо следить (всякий раз, когда вводятся какие-либо операции над объектами), устойчивы ли эти операции относительно данной абстракции, не нарушается ли при этом интервал данной абстракции отождествления.

Особую осторожность необходимо соблюдать при отождествлении имён, что часто делается, когда тождество определяют семантически по примеру Фреге: « $A=B$ обозначает тот факт, что имена A и B имеют то же самое (одинаковое) концептуальное содержание, так что мы можем повсюду заменять B на A и наоборот»¹⁹⁷ или Дживонса: «Символы $A = B$ обозначают тождество объектов, представленных неопределёнными терминами или именами A и B »¹⁹⁸.

К примеру, рассматривая дроби как имена рациональных чисел, мы вправе написать равенство $p/q = ps/qs$, где s и $q \neq 0$. Так как оба члена этого равенства — это два различных имени одного и того же рационального числа, то, применив абстракцию отождествления к этим именам, мы хотели бы их равенство толковать как тождество. Однако не в любом контексте (и, замечу, не в любом экстенциональном контексте!) эти имена подстановочны и, как следствие, обозначаемые ими объекты тождественны. В частности, p/q и ps/qs не подстановочны относительно операции нахождения числа, заключённого в положительном интервале между двумя данными дробями. Указав на этот пример, Шатуновский замечает, что при рассмотрении свойств операций необходимо для каждой из них исследовать вопрос о возможности замены равного равным¹⁹⁹.

Со своей стороны добавлю, что если задачу отождествления ограничить контекстом, определяющим указанную выше операцию, то относительно неё подстановочность всё же выполнима в интервале данной абстракции отождествления рациональных чисел. Более глубокий результат можно получить, рассматривая предикат равенства не как двухместный, а как четырёхместный (или двухместный от функций по натуральным аргументам). При этом выясняется, что только равенство натуральных чисел действительно удовлетворяет всем условиям на логическое тождество, а равенство дробей — только условиям на эквивалентность.

Вообще, отождествление — это не констатация (узнавание, прослеживание, подтверждение) отношения тождества, а некоторое его *порождение*, исходя из определённых установок познания. Исходя из тех же установок, решается вопрос о достаточных основаниях для тех или иных отождествлений. Субъективность таких оснований может определяться доступностью (полнотой) информации об объектах, но, очевидно, что какая-то информация такого рода имеется всегда. Следовательно, отождествление, как и различение, — это всегда некоторая задача, допускающая (в зависимости от условий) различные решения.

5.3. Абстракция отождествления

Если верно, что в основе всякой абстракции лежит акт отождествления, то не менее верно и то, что само отождествление является абстракцией. Но слово «отождествлять» позволительно толковать и употреблять в разных смыслах (по-разному). Всё зависит от того, на каких условиях допускаются акты отождествления. Абстракция отождествления (термин введён А.А.Марковым, 1954) естественно релятивизирует этот акт, выражая по существу, потребность в принципе, более прозрачном и менее метафизичном, чем лейбницевский принцип тождества неразличимых.

Абстракция отождествления — это абстракция, с помощью которой из каких-либо объектов одного рода, то есть в каком-либо смысле объектов одинаковых (эквивалентных, равных), посредством отвлечения от их посторонних различий (несущественных для данного отношения одинаковости) порождается объект, единственный в своём роде — *абстрактный объект*.

Для каждого применения абстракции отождествления те объекты, к которым она применяется (например, все отпечатки буквы «я», напечатанные на этой странице) называют (считают) *конкретными*;

а те, что возникают в результате применения абстракции отождествления (например, единственная буква «я» русского алфавита), — *абстрактными*.

В систему абстракций конструктивной логики и математики абстракция отождествления включается в качестве «вспомогательной» абстракции. Хотя с её помощью порождаются абстрактные объекты — абстрактные буквы, абстрактные алфавиты, абстрактные слова и пр., всё же считается, что это не приводит к таким актам идеализации, которые, с одной стороны, существенны для конструктивных теорий, а с другой, выводят за рамки этих теорий, нарушают их принципиальные установки, поскольку любое рассуждение с применением абстракции отождествления может быть заменено рассуждением, не использующим этой абстракции, а именно рассуждением только на конкретных объектах. Если лейбницевский принцип тождества неразличимых, характеризуя тождество как «внутреннее» отношение объекта, был для него иным выражением принципа индивидуации, то для конструктивистов абстракция отождествления не исключает, а скорее предполагает абстракцию индивидуации как независимый принцип, хотя они ничего об индивидуации как абстракции не говорят.

То, что Марков назвал абстракцией отождествления, относится не ко всякому отождествлению, а лишь к такому, где делается преднамеренная абстракция от «неощутимых различий» индивидуально различных объектов, хотя, строго говоря, абстракция отождествления никак не связана с неразличимостью, если последняя понимается как эмпирический факт. В самом деле, рассматривая конструктивные объекты «с точностью до одинаковости, то есть пренебрегая различиями между одинаковыми объектами»²⁰⁰, одновременно допускают (а фактически постулируют) транзитивность одинаковости, оговаривая, что одинаковость и различие определяются при этом на глаз²⁰¹. Однако, держась эмпирической точки зрения, в этом случае нельзя игнорировать проблему «малых различий». Пренебрегать такими различиями мы не можем, не указывая явно адекватный «способ пренебрежения», иначе у нас нет гарантии от возникновения противоречий, когда незаметное накопление малых различий (в условиях принятия абстракции потенциальной осуществимости) «размывает» границу между одинаковым и различным, что естественно приведёт к ситуации, которую я называю *парадоксом транзитивности* (или парадоксом Пуанкаре)²⁰².

Ясно, что в конструктивном истолковании абстракции отождествления ссылок на эмпирический опыт — это простая формальность, не предусматривающая эмпирических оправданий. Обычные для

эмпирического опыта погрешности сравнений (измерений) «с точностью до» (например, с эталоном) здесь либо вовсе не принимаются во внимание, либо просто приравниваются к нулю. Особенности следящей системы (наблюдателя) абстрагироваться от неощутимых различий не являются здесь составной частью отношения, возникающей в актах отождествления, хотя сами эти акты обычно рассматриваются как элементарные действия над конструктивными (физически определёнными) объектами. Но «физичность» ситуации здесь явно идеализированная, *платонистская*, что, между прочим, и создаёт гарантию от возникновения противоречий²⁰³.

Вот почему я убеждён, — вопреки известному заявлению, что сама по себе абстракция отождествления носит только вспомогательный (и исключаемый) характер, — что для конструктивных (как и для всяких иных математических) теорий она необходима по существу. Только в этом случае, выделяя понятие о «конкретных объектах», образующих универсум теории, можно а priori предполагать не только возможность отождествлять или различать эти объекты всякий раз, когда нам это потребуется, но и принимать такое отношение одинаковости между конкретными объектами, которое рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Постулированием транзитивности заведомо предохраняются от неприятностей, связанных с накоплением неощутимых различий. Это, конечно, необходимо, но недостаточно для самой абстракции отождествления. Если первый её этап состоит во введении базового отношения типа равенства (одинаковости) и в отвлечении (первого порядка) от всех неприятностей, связанных с эмпирическими актами различения²⁰⁴, то второй — в отвлечении (второго порядка) от множественности одинаковых, в замене одинаковых многих на один абстрактный объект как общее свойство всех одинаковых между собой объектов. В первоначальной редакции А.А. Марков высказывался даже в более платонистской манере, говоря об «образовании абстрактного понятия»²⁰⁵ с помощью этой абстракции.

Как бы там ни было, но именно такого рода замена составляет содержание абстракции отождествления в применении к конкретным объектам²⁰⁶. Она выражает простой факт редукции. Вместо того чтобы говорить о многих одинаковых, она позволяет говорить об одном и том же, но абстрактном объекте. Понятие «один и тот же» при этом уточняется через абстракцию от базовых отношений: два конкретных объекта тогда и только тогда представляют один и тот же абстрактный объект, когда эти конкретные объекты одинаковы. Следовательно, в отличие от обычных аксиоматических определе-

ний, содержание понятия «один и тот же объект» (а следовательно, и понятия тождества) не является раз и навсегда данным. Оно может определяться (и на самом деле определяется) в разных случаях разными процедурами отождествлений.

К примеру, что значит отождествить две буквы в русском алфавите, когда речь идёт об их употреблении в устном речевом общении? В этом случае придётся одинаковость понимать как одинаковость их фонетических значений. Здесь одной графикой обойтись уже нельзя, поскольку графическое равенство и фонетическое равенство букв могут не совпадать. Более того, дело осложняется тем, что фонетическое равенство (одинаковость) букв в устной речи определяется их вхождением в слово — их «соседями» по вхождению в слово. В лингвистике этот факт известен как позиционный принцип графики.

Таким образом, вводя абстракцию отождествления, надо позаботиться об отношениях одинаковости и различия. Процедура их введения и распознавания может быть как финитной, так и трансфинитной. И хотя в математике абстракция отождествления применяется «на каждом шагу, по отношению к весьма разнообразным «одинаковостям» весьма разнообразных объектов»²⁰⁷, она применима лишь при условии конструктивного характера этих объектов. Между тем «конструктивная математика использует гораздо более “скромную” систему абстракций, нежели традиционная»²⁰⁸. В более общем (традиционном) случае место абстракции отождествления заступает теоретико-множественный *принцип абстракции*.

5.4. Абстракция отождествления и обобщающая абстракция

В чистой логической теории тождества мы стремимся создать понятие, которое имело бы абсолютный смысл, независимый от того, как мы отождествляем объекты. Иными словами, та или иная абстракция отождествления допускается здесь наряду с понятием о тождестве. В чистой теории тождества мы задаем только смысл предиката « $x = y$ ». О фактической истинности суждений о тождественности, возникающих на основе этого предиката, мы узнаем в приложениях логической теории, когда мы отсылаем за разъяснением значений переменных, входящих в предикат тождества, к некоторой модели, то есть когда мы имеем в виду не понятие тождества само по себе и не логическую функцию, соответствующую этому понятию, а фактические условия ее выполнения. Но если говорить о приложениях, то

для них, как правило, и отождествление и различие суть абстракции: «Отождествление, поскольку *абстрагируются* от различия, и различие, поскольку *абстрагируются* от отождествления»²⁰⁹.

Спору нет, акты отождествления и различения, конечно, несовместимы. Но фактические основания для применения отношения, соответствующих этим актам, вполне могут их совмещать, скажем, в плане онтологическом, когда, не впадая в противоречие, можно говорить, что рассматриваемые предметы в некотором смысле одинаковы, а в некотором другом — различны. Так, мы говорим о двух (и, следовательно, различных) буквах «о» в слове «одинаковый», хотя эти буквы графически одинаковы. Но поскольку наше сознание «фотографирует» их с одной стороны — либо со стороны их одинаковости, либо со стороны их различия — каждая такая фотография с точки зрения истинности познания имеет лишь преходящее значение, отражая действительность формально и неполно. Вот почему можно сказать, что познание «*достигает полноты лишь в единстве тождества с разностью* и тем самым состоит только в этом единстве»²¹⁰.

В диалектической философии на этом основании нередко говорят, что, применяя абстракцию отождествления, по существу, довольствуются «частичным тождеством», поскольку выражение «*x тождественно y*» — это только эллиптический вариант выражения «*x есть та же самая сущность А, что и y*», где *А* — своего рода переменная для подстановки различных сущностей в различных контекстах. При таком толковании абстракции отождествления содержание этой абстракции усматривают в выделении общих признаков предметов, а порождаемое ею отношение — в *относительном тождестве*, вообще говоря, различных, предметов по этим выделенным общим признакам, т. е. когда без обиняков полагают, что абстракция отождествления и обобщающая абстракция — это одно и то же²¹¹.

Однако интерпретация абстракции отождествления как обобщающей абстракции наталкивается, по-моему, на следующее возражение.

Во-первых, «выделение» признака, общего многим, и отождествление многих по этому признаку — это не одно, а два различных умственных действия. Между «выделяют общее свойство» и «отождествляют по общему свойству» нельзя писать союз «то есть», если иметь в виду субъективный аспект этих действий. Первое ни просто, ни с необходимостью не влечет второе, хотя второе и подразумевает первое.

Во-вторых, считать тождественными предметы, имеющие лишь некоторый общий признак, — значит, входить в сознательный конфликт с логическим понятием тождества, безразлично, идет ли речь при этом о тождестве предметов «для нас» или об их тождестве «в

себе». Философ, говоря, что «у меня нет основания выставить суждение $A=B$, если A и B сначала не кажутся мне различными до тех пор, пока я при ближайшем исследовании не нахожу, что они могут замещать друг друга»²¹², выражается еще недостаточно ясно, чтобы распознать по его словам, имеется ли в виду тождество или только одинаковость различных объектов. Чтобы высказаться ясно, необходимо уточнить *интервал подстановочности* (заменяемости) рассматриваемых объектов, оговорив особо ситуации «внутри» и «вне» этого интервала. Допуская «тождество различных» без таких оговорок, мы сейчас же наталкиваемся на контрпример для подстановочности тождественных, то есть фальсифицируем одну из основных характеристик логического понятия тождества. А это очевидным образом приводит нас к внутренней противоречивости концепции «тождества различных»²¹³.

Разумеется, если ограничиваются лишь некоторым «запасом признаков» (в чём, собственно, и выражается обобщающая абстракция), то в нем может и не оказаться тех признаков, которые различали бы рассматриваемые нами объекты. Однако сама идея тождества различных предполагает, что такие признаки не только существуют, но и заведомо нам известны. Поэтому такая аргументация не может нас спасти от противоречий, если мы не обратимся к явному указанию на *интервал абстракции отождествления*.

Рассуждая о тождестве, мы в любом случае обязаны ставить вопрос о том, каким именно условиям подчиняются наши представления об «одном и том же» и, соответственно, наши суждения об «одном и том же». Выяснение условий истинности таких суждений — это обычное и естественное требование диалектики анализа, но оно вовсе не означает, что наличием таких условий мы можем оправдать подмену понятий, т. е. подмену логического понятия тождества неким его суррогатом, называемым «частичным тождеством».

Ценность абстракции отождествления, в частности, в том, что она даёт определённый выход из этих трудностей, если не приписывать ей чужеродного содержания и отличать её от известных абстракций традиционной логики.

Абстрагируя признак, общий многим, то есть применяя обобщающую абстракцию, мы делаем только первый шаг к желаемой цели, мы создаем (по соглашению) логическую возможность для «уравнивания» многих объектов, одинаковых по данному признаку. Мы переводим эту возможность в действительность, когда мы явным определением вводим одинаковость в систему наших понятий в виде перечня из трёх аксиом — *рефлексивности, транзитивности* и

симметрии. Однако этот перечень, являясь логическим выражением свойств отношения одинаковости (типа равенства), не является логическим образом обобщающей абстракции. Не случайно в конструктивном анализе, где, собственно, и появился термин «абстракция отождествления», об обобщающей абстракции не говорится ни слова. Значит, если мы хотим указать на явную связь отношения одинаковости с обобщающей абстракцией, нам необходимо найти подходящий логический образ этой связи, например, определить одинаковость объектов контекстуально одной (бескванторной) аксиомой:

$$A(x) \supset (\langle x = y \rangle \equiv A(y)).$$

В этой аксиоме $A(\omega)$ обозначает произвольное условие (произвольный признак, по которому идёт обобщение), $\langle \equiv \rangle$ — это эквиваленция, а x и y — различные свободные переменные. Мы можем получить из этой аксиомы все обычные свойства одинаковости, а также подстановочность одинаковых, но только относительно предиката $A(\omega)$ ²¹⁴.

Так определённое отношение $\langle x = y \rangle$ естественно назвать отношением тождества через абстракцию. Но если такое тождество через абстракцию (такую одинаковость, эквивалентность и пр.) иногда и называют тождеством в логическом смысле, то это только метафорический перенос значения, основанный на сходстве наименований. Тождество как одинаковость по признаку действительно условно, действительно «частичное тождество». Это тождество объектов в интервале абстракции данного признака. Лишь в том случае, когда этим (интервальным содержанием) исчерпывается вся информация об объектах (всё то, что мы можем на данный момент узнать о них), лишь тогда — и только тогда — имеется достаточная основа, чтобы говорить об их логическом тождестве.

Очевидно, что в случае обобщающей абстракции такой основы ещё нет. На шаге этой абстракции мы сохраняем полное понимание одновременного «сходства и различия» объектов. Иначе мы не смогли бы поставить вопрос об отвлечении от различий, не смогли бы сказать, что выделяем признак, общий многим, говоря о многих различных предметах. Таким образом, в основе обобщающей абстракции лежит *абстракция одинаковости*, но одинаковость — это ещё не тождество.

Абстракция отождествления в собственном (строгом) смысле слова заключается в возможности заменить онтологический универсум конкретных объектов гносеологическим универсумом абстрактных объектов, то есть по данному универсуму «конкретных» и одинаковых сущностей построить универсум только различных (индивидуализированных!) «абстрактных» сущностей. Иначе говоря, она позволяет свести одинаковость к тождеству в его логическом смысле —

к индивидуации, что, в свою очередь, позволяет сказать, что каждая абстрактная сущность (полученная с помощью абстракции отождествления) единственна.

Когда абстракцию отождествления, о чём уже говорилось выше, стремятся истолковать, следуя средневековой заповеди номинализма «не множить сущности без нужды», то неизменно добавляют, что создаваемые ею абстрактные объекты берутся только как *façon de parler*, а сама абстракция отождествления «только как удобный способ выражения, сокращающий формулировки», так что по «этим сокращенным формулировкам всегда без труда могут быть восстановлены более длинные формулировки, обходящиеся без абстракции отождествления»²¹⁵.

Но не этой ли абстракцией а priori устраняется противоречие между конечностью алфавита и потенциальной бесконечностью конкретных букв при нашем первом знакомстве с алфавитным языком? И возможно ли (если вообще возможно) названное исключение осуществить «без труда», когда имеют в виду отождествления *in actu* в бесконечных процессах? Установка на исключение абстракций представляется мне наивной, близкой к порочному кругу. Ведь любое нетривиальное употребление абстракции отождествления предполагает, что универсум не должен быть пустым (и даже одноэлементным). Но непустота определяется с помощью равенства $\forall x \exists y (x = y)$, а равенство, в свою очередь, определяется через абстракцию.

5.5. Абстракция отождествления и факторизация

Итак, как я уже сказал выше, применяя абстракцию отождествления, мы не можем остановиться на тождестве «таких же», а должны обратиться к тождеству «тех же самых». Это необходимо хотя бы для того, чтобы обеспечить единственность вводимых абстрактных понятий, и, что особенно важно в вопросах обоснования математических суждений, укрепить нашу веру в однозначность натурального ряда. То, что эта однозначность является предметом веры, а не фактом, было замечено ещё в эпоху методологических баталий классиков и эффективистов²¹⁶. В частности, Лузин в письме к Куратовскому писал об этом так: «Фундаментальная проблема состоит в том, чтобы выяснить, является ли последовательность целых положительных чисел *воплне* объективной? Кажется, что она *почти* объективна, и что имеются следы несомненной субъективности, такой, что нельзя говорить о последовательности целых положительных чисел всегда, во всех случаях, в одном и том же смысле. Однако в данный момент слишком преждевременно ста-

вить жгучую проблему о *единственности последовательности целых положительных чисел* и говорить о конечных недостижимых числах»²¹⁷.

Характерно, что в начале 60-х гг. эта «жгучая проблема» была вновь поставлена (и возвращена к обсуждению) в *ультраинтуитивнистской программе* обоснования теоретико-множественной математики²¹⁸. В мою задачу не входит обсуждение этой проблемы. Здесь важно лишь подчеркнуть её самую тесную связь с проблемой отождествлений, а точнее, с невозможностью некоторых отождествлений и в силу этого с невозможностью (в некоторых случаях) доказательств противоречивости дедуктивных теорий²¹⁹. Поэтому «объективности», о которой говорит Лузин, естественно понимать как вопрос онтологии, как вопрос об онтологической индивидуации натуральных чисел, как вопрос об осмысленности понятия тождества объектов вообще, независимо от того, идёт ли речь об их гносеологической (фактической) определмости или о тех объектах, для которых мыслится только их онтологическая (трансцендентная) определмость, независимая от предположений, которыми руководствуются при построении теории. Очевидно, что для конструктивного образа мышления, поскольку он несёт в себе «следы несомненной субъективности», вопрос о «тождестве вообще» не имеет смысла. А это и приводит нас к необходимости отличать абстракцию отождествления от того процесса абстракции, который в теоретико-множественной математике называют факторизацией, или гомоморфизмом.

Как и абстракция отождествления, названный процесс лежит в основе определений через абстракцию²²⁰. Но поскольку это приём классической математики, он не чуждается универсалий, а напротив — именно универсалии и являются объектами, которые вводятся с его помощью. Весь процесс идёт, по существу, по следующей схеме: если x и y одинаковы, то зачисляем их в один класс, так что если x принадлежит K_x , а y принадлежит K_y , (и при этом речь идёт о произвольных объектах), то K_x и K_y — классы одинаковых объектов (их называют *классами абстракции* или *классами эквивалентности*), и, следовательно, эти классы тождественны в обычном смысле теоретико-множественного принципа объёмности (экстенциональности), то есть тождественны логически (представляют собой «один и тот же» класс). Продолжая этот процесс до исчерпания всех элементов исходного множества (онтологического универсума конкретных объектов), мы разбиваем это множество на классы так, что каждый класс содержит все элементы, одинаковые между собой. Но тем самым в качестве нового абстрактного объекта вводится и некоторое новое понятие, соответ-

ствующее классам абстракции, а сами классы образуют новые *сущности* — элементы нового, теперь уже гносеологического универсума, в котором одинаковости на множестве конкретных объектов соответствует тождество на множестве классов абстракции. Иными словами, «гомоморфизм означает не что иное, как объединение в «классы эквивалентности» (классы абстракции — *М.Н.*) совокупностей объектов, могущих различаться посредством других критериев отождествления, в чём и состоит образование абстрактных понятий»²²¹. Очевидно, что при этом, вообще говоря, отступают от условий *конструктивности* вводимых абстрактных объектов (от номиналистической установки конструктивизма), когда абстрактный объект мыслится только как произвольный представитель таких же, как он, конкретных объектов, но взятый как эталон одинаковости.

В несколько свободной манере (не претендуя на строгость) можно было бы высказаться так: если мы сохраняем информацию о прежнем универсуме, к элементам которого применялась обобщающая абстракция, то возникает типичная *интервальная ситуация* «внутри и снаружи», непротиворечивый выход из которой объясняется тем, что «снаружи», на классах абстракции, одинаковость — это тождество, а «внутри», на исходном универсуме, по-прежнему одинаковость. Значит, в противовес обобщающей абстракции факторизация не обобщает, а изолирует и индивидуализирует, и индивидуализирует не конкретные, а абстрактные объекты. Такая ситуация имеет место, по существу, в каждом случае гомоморфного отображения при согласованности отношения одинаковости с данным отображением, то есть в случае, если это отображение не меняет своего значения при замене любого его аргумента одинаковым с ним. Тогда говорят, что значение отображения не зависит от выбора элементов в классах абстракции, а зависит только от классов абстракции.

Если одинаковость согласована с данным отображением, то структура, определенная на исходном множестве, переносится на фактор-множество по данной одинаковости. Так, по операциям дизъюнкции, конъюнкции и отрицания множество высказываний образует структуру булевой алгебры, а определенная на этой структуре равнозначность высказываний согласована с отображением множества высказываний в множество их истинностных значений. В соответствии с этим и структура алгебры высказываний переносится на структуру множества их истинностных значений, образуя алгебру истинностных значений (алгебру Линденбаума — Тарского). Следовательно, коль скоро речь идет о принципе абстракции, то можно сказать, что одинаковость конкретных объектов од-

нозначно выражается в тождестве представляющих их абстрактных объектов, а тождество абстрактных объектов, порождаемых абстракцией отождествления, в свою очередь, однозначно выражается одинаковостью представляемых ими конкретных объектов. Этим обстоятельством нередко пользуются или для замены конкретных объектов их абстрактными представителями — свойствами конкретных объектов, или чтобы «превратить» одинаковость в логическое тождество.

К примеру, структура рационального числового поля нестандартна по отношению к тождеству, но ее можно превратить в стандартную, «склеив» любые две эквивалентные дроби. Когда говорят, что «одна и та же» положительная рациональная дробь допускает бесконечное разнообразие представлений, то этим уже подчёркивается, что «одно и то же» — это класс эквивалентных представлений, в которых эквивалентность совместима с арифметическими операциями над дробями. Но если считать, что дроби сами суть числа, то такое *тождество-эквивалентность* нельзя толковать как тождество чисел в его логическом смысле, поскольку тождество дробей имеет иной смысл, чем тождество натуральных чисел. Если последнее — это тождество индивидов, то первое — это тождество отношений этих индивидов с существенно иным смыслом²²².

5.6. Принцип абстракции

Связав абстракцию отождествления и факторизацию, я позволил себе некую вольность в толковании этой абстракции, некий отход от её конструктивного смысла, — возможность рассматривать эту абстракцию в рамках других *классических* абстракций. Но эта уступка в строгости даёт некоторый гносеологический выигрыш в общности: говоря о произвольных *разбиениях* произвольных множеств, можно привлекать абстракцию отождествления, то есть включать субъективный элемент оценки в онтологию классических понятий. Это тем более важно, что классическая идея разбиения — это далеко идущее обобщение традиционного (для формальной логики) понятия *классификации* или *деления объёма понятий* (*divisio*), то есть порождение системы непустых и взаимно непересекающихся (дизъюнктивных) классов (в традиционных терминах «видов» — *membra divisionis*), в сумме образующих покрытие объёма разбиваемого (исходного) понятия (*totum dividendum*).

Обобщение этой традиционной логической процедуры состоит, во-первых, в утверждении о существовании отношения типа равенства (эквивалентности), сопряжённого с каждым данным разбиением, и, во-вторых, в утверждении о существовании разбиения, сопряжённого с каждым отношением типа равенства (эквивалентности), определённым на исходном множестве (объёме понятия). Оба эти утверждения имеют характер теоретико-множественных теорем. Если исходный класс («род» — genus) конечен и содержит n элементов, то для каждого данного разбиения число видов $\leq n$. А общее число всех возможных (различных) его разбиений вычисляется по формуле $B_n = \sum_{m=1}^n S(n, m)$, где $S(n, m)$ — число Стирлинга второго рода, а m — число различных видов. При этом каждая эквивалентность производит только одно разбиение, и каждое разбиение индуцирует только одну эквивалентность.

Вся эта комбинаторика выглядит не слишком философичной, если не принять во внимание её связь с абстракцией отождествления или с той известной процедурой, которую называют *определением через абстракцию*²³, или, наконец, с тем уточнением (и анализом) этого определения, которое Рассел назвал *принципом абстракции*.

В традиционной логике классификация представлялась скорее актом конкретизации, чем абстракции. Главным было «движение вниз» — от summum genus к infima species и далее к индивидуальным объектам. В определениях через абстракцию существенным является как раз обратный процесс — от индивидов, обладающих некоторым общим свойством (и, следовательно, равным в силу абстракции отождествления их по этому свойству), к объектам принципиально иной природы, к абстрактным сущностям более высокого порядка (к абстрактным понятиям или «классам абстракции»). К примеру, понятия «форма», «направление», «стоимость» — всё это абстрактные сущности, полученные определениями через абстракцию.

Однако, поднимаясь таким путём «по лестнице абстракций», мы не множим сущности без нужды, а напротив, производим акт редукции «многого к одному», поскольку, по определению, любым двум равным объектам в этом акте соответствует всегда «одна и та же» абстрактная сущность, один и тот же абстрактный образ. Параллельным прямым — одно и то же направление; подобным фигурам — одна и та же форма; инерциальным системам — одни и те же физические законы, обмениваемым товарам — одна и та же стоимость.

Но если два и более объектов имеют функциональное отношение к одному и тому же третьему объекту, то все объекты, принадлежащие к области данного отношения, становятся эквивалентны (и в

определённом смысле неразличимы) в рамках данного отношения. Поэтому каждый из них может выступать как представитель любого другого из этой области. Так вводится понятие об **абстрактных представителях** классов абстракции, носителях свойств, общих для всех элементов соответствующих классов абстракции. Но поскольку и самый класс абстракции может быть отождествлён (в теоретико-множественном смысле) со свойством, общим всем его элементам (это обычный интуитивный принцип абстракции теоретико-множественной логики), возникает возможность, в свою очередь, в подходящем интервале абстракции отождествить этот класс с любым его элементом, если этот элемент рассматривается как представитель этого класса абстракции. Такое отождествление представляется даже более естественным, чем отождествление класса и свойства, в силу заведомо принятого интервала абстракции, согласно которому все другие свойства, различающие объекты этого класса «внутри него», объявляются посторонними, то есть практически их нет, если смотреть «изнутри» принятого интервала абстракции²²⁴.

Такого рода редукцией отчасти ослабляется «творческий» (и потому для многих подозрительный) характер определений через абстракцию.

ГЛАВА 6. ДЕДУКТИВНОЕ ОБОБЩЕНИЕ И ПРИНЦИП АБСТРАКЦИИ

Единичные случаи представляют собою единственное основание вывода, какое только может быть, так как их значение не может усилить никакая логическая форма.

Джон Ст. Милль, «Система логики»

Иллюстрация на частном случае демонстрирует некоторый тип рассмотрения, применимый ко всем случаям.

Клини С.К., «Математическая логика»

Вопрос, обсуждаемый ниже, Эвэрт Бет называет частным, но важным вопросом, которым, по его словам, «до сих пор никто не занимался и не дал удовлетворительной трактовки»²²⁵.

Что касается удовлетворительной трактовки, то Бет, вероятно, прав, хотя трудно найти философски значимую проблему, которая получила бы общепринятое толкование. Но, говоря, что этим вопросом до сих пор никто не занимался, Бет, конечно, неправ. Он сам указывает на некоторые исторические корни этого вопроса. Правда, ограничиваясь темой общих понятий, Бет ведёт его родословную и общую формулировку от Локка и Беркли. Но действительная история всё же восходит к античности, хотя и тогда он обсуждался преимущественно в контексте классической философской темы универсалий. Первая дошедшая до нас попытка его решения принадлежит Аристотелю.

А суть дела в философском контексте сводится к объяснению вопроса, каким образом «частное» может оказаться эквивалентом «общего». В логическом же контексте она сводится к обоснованию общезначимости утверждений (в частности, математических теорем), доказанных первоначально на единичных (конкретных) примерах для какого-либо частного случая, подтверждающего общее утверждение. Практика таких доказательств переросла со временем в методологический приём: распространять (переносить) на все объекты определенного класса утверждения (высказывания, теоремы), правильность которых установлена (доказана) для *произвольно взятого* единичного объекта данного класса, даже если при этом и остаётся невыясненным вопрос о

логической законности (обоснованности) такого обобщающего перехода. Именно в связи с последним вопросом Рассел заметил, что такого рода вопросы «очень трудны и исторически очень важны»²²⁶.

На первый взгляд схема получения общих утверждений совпадает в этом случае с неполной индукцией, так что вопрос её обоснования сводится к вопросу обоснования индуктивных умозаключений вообще. Но такую позицию принять затруднительно, когда речь идёт о дедуктивных теориях. Основной принцип любой дедуктивной теории – *dictum de omni*. Обратное этому принципу не имеет собственно логического оправдания.

Тем не менее, и в дедуктивных теориях говорят об «общем приёме решения», о решении задачи в «общем виде», о доказательстве или рассуждении, проведённом в «общей форме», когда эта общность индуцирована рассмотрением такого частного случая, который вселяет уверенность в корректность обобщения.

Иначе говоря, в рассуждениях на доказательство нередко и как будто бы сознательно выбирают дедуктивно неоправданный путь от частного к общему, полагаясь, по-видимому, на «нашу способность убеждаться в истинности общих высказываний на основании ограниченного опыта»²²⁷. И такая практика восходит к античности.

6.1. Аподейктика в античности

К примеру, в «Началах» Евклида доказательство теоремы о сумме внутренних углов треугольника начинается словами: «Пусть треугольник будет ABC...» и заканчивается словами: «Значит, во всяком треугольнике...»²²⁸. Очевидно, что здесь обобщающий переход не в одной только форме выражения. И аналогично Евклид доказывает некоторые другие теоремы, не заботясь о том, что в таком способе доказательства имеется шаг, требующий логического восполнения.

Известно, что та форма изложения геометрии, которую ей придал Евклид, на протяжении столетий служила моделью дедуктивной теории и считалась «абстрактно-логической». Она казалась не только образцом дедуктивной теории, но и образцом логического метода доказательства вообще. Вот яркий пассаж такого отношения к автору «Начал» и его теории: «великий адвокат геометрической истины каждый раз предусматривает все мельчайшие возражения “противной стороны”, для которой опущение хотя бы самого очевидного силлогизма, *хотя бы одной логической формальности* (курсив мой – М.Н.) даст повод к кассации всего доказательства»²²⁹.

В этом пассаже выражен скорее пietet к традиции, чем признание факта *ex professo*, ведь с точки зрения современных требований к логической строгости доказательств теория античных геометров далека от дедуктивного идеала. Однако кассации евклидовского доказательства теоремы о сумме внутренних углов треугольника вряд ли потребует и современный геометр. Как заметил Бет, «современный геометр в любом случае вначале сосредоточится на созерцании частной фигуры и только после этого сделает необходимое обобщение полученного результата»²³⁰. Так что и современный геометр всё ещё следует «доказывающей манере» древних — подчинять доказательства не только формально-логическому порядку, но и наглядной очевидности²³¹.

Говорят, что «Элементы» писались Евклидом в эпоху «организации научного метода», когда дедуктивный взгляд на науку только формировался под влиянием философии Платона и Аристотеля. Но Евклид мог и не задаваться вопросом, насколько его способы доказательства отвечают методологическим установкам той или иной философской школы, поскольку античной наукой равным образом допускались и аксиоматический и конструктивный (генетический) способы организации теории. Та часть доказательства, которая называлась «изложением» (*ekthesis*), традиционно предполагала законную роль наглядной геометрии — обращение к примеру (*exemplum*), к чертежу, к пространственной интуиции (которые служили базисом индукции), чтобы затем, убедившись в справедливости частного случая (в справедливости рассуждения *in concreto*), посредством абстракции вернуться к общему положению, сформулированному в теореме.

Законность обобщения казалась при этом очевидной, поскольку доказательство, хотя оно и велось с опорой на созерцание вполне определённой частной фигуры, само не основывалось на «материальном» эксперименте — оно не являлось опытным или эмпирическим доказательством в собственном смысле, как в случаях измерения, складывания углов, перегибания листа (доказательство на бумажном треугольнике) или использовании транспортира. Теорема относилась к идеальным объектам теории и устанавливалась, по выражению Прокла, невещественным и разумным путём.

Ссылка на идеальные объекты теории, на её экзистенциальный характер в определённом смысле устраняла эмпирический элемент из состава доказательства и — в этом смысле — его философскую индуктивную суть²³². Но она не устраняла логическую суть вопроса о том, в каких случаях в дедуктивной теории для доказательства её

теорем можно пользоваться примером или применять методы заключения от частного к общему, и можно ли при этом считать, что такие методы не нарушают дедуктивный характер теории.

Отвечая сегодня на этот вопрос, стоит, конечно, напомнить его историю. Поэтому я предлагаю здесь (заведомо неполный) поимённый исторический экскурс, следуя отчасти порядку обсуждения, что принят у Бета. Но сначала я коротко остановлюсь на содержании понятия, о котором выше уже шла речь и которое в дальнейшем будет основным предметом нашей темы — на понятии обобщения.

6.2. О понятии «обобщение»

Без претензии на строгость (на определение) скажем, что обобщение — это форма (метод) приращения и организации знания путём перехода на более высокую ступень *абстракции*. Точнее и конкретнее, обобщение — это ограничение исходного разнообразия данных путём построения некоторого его гомоморфного образа, являющегося самодовлеющим и полноценным абстрактным знанием «внутри себя».

Обобщение считается важнейшим средством познания, позволяющим извлекать законы из заслоняющей их пестроты явлений, кодифицировать и отождествлять в «единой формуле» множество различных вещей и событий, «сводить под одну крышу совершенно разные объекты»²³³. В науке этот обобщающий и одновременно упрощающий взгляд закрепляется в форме новых понятий и суждений. И хотя самый акт обобщения основан на ограничении, его реальным результатом является обычно изменение семантического поля вновь введённых понятий и расширение сферы их применения. Так, переход от арифметики к алгебре является, конечно, обобщением. Он предполагает существенное изменение языка теории и применяемых методов доказательства. И если в арифметике ограничиваются пониманием сложения как конкретной операции над конкретными числами, то в алгебре область действия сложения заведомо не оговаривается и ограничивается только условием равенства этих областей с точностью до изоморфизма. Таким образом, операция сложения понимается в алгебре уже как *абстрактная операция* (как класс в известном смысле тождественных операций), подчинённая определённой группе законов, которые, если оставаться на точке зрения конкретной арифметики, нельзя ни формализовать (сформулировать в общей форме), ни доказать как теоремы. Дальнейшим следствием такого обобщения является переход к более абстрактным понятиям алгебры, таким как группы, кольца, модули и пр.

За исключением тавтологий (чисто логических истин), не существует утверждений, истинных в любой предметной области. Но истинность многих утверждений сохраняется, если они высказываются об объектах в определённом смысле равных. Следовательно, одна из задач обобщения — разыскание таких общих утверждений и таких отношений равенства. Настаивание на обязательном *различии*, на *индивидуации* во что бы то ни стало, лишило бы науку возможности обобщений — «сознательное ограничение... некоторыми гомоморфными образами целого становится оправданным и в действительности почти неизбежным»²³⁴.

Таким образом, обобщение — это в некотором смысле избирательное отображение. И не случайно, что исторически в науковедении с понятием обобщения связывали тип и структуру знаний, а в гносеологии — процессы, пути и методы познавательной деятельности.

Представление об обобщении как методе сложилось, по-видимому, не раньше, чем была осознана разница между индукцией и дедукцией. Если сопоставить словарное содержание двух терминов — «индукция» и «обобщение», то мы не обнаружим существенной разницы между ними, словно речь идёт о понятиях-синонимах. И такой взгляд на обобщение в философии — почти укоренившейся предрасудок, ведь исследование обобщающих выводов, когда «в результате ряда усмотрений опыта устанавливается один общий взгляд относительно сходных предметов»²³⁵, со времён античности признавалось делом индуктивной логики. Мысль о том, что существуют обобщающие процедуры, отличные от индуктивных, что индукция — это только один из видов обобщения в классификационной схеме обобщающих умозаключений, до сих пор не получила гражданства в словаре философских понятий.

Между тем дедуктивные процедуры обобщения известны давно, хотя применяются они в основном в математике. Здесь базой для обобщения служат, конечно, не эмпирические объекты, а понятия. При этом *обобщающая абстракция* состоит в том, что в некотором данном понятийном разнообразии ищется его устойчивая часть, некий инвариант. Например, в системе линейных уравнений — общий метод их решения. Собственно устойчивой частью системы линейных уравнений является отношение между этой системой и любой выводимой из неё. Это отношение является, по существу, отношением логического следования, что и обобщается в соответствующей теореме. Ясно, что здесь нет никакого перехода от частного к общему, а есть только фиксация логической закономерности. Другим очевидным примером дедуктивного обобщения могут служить бес-

конечная индукция и математическая индукция, универсальное обобщение (\forall -обобщение) в чистом исчислении предикатов, известное из школьной логики обобщение понятия (от более сильного понятия к более слабому), процедура обобщения, которой посвящена эта тема – обобщение «по правилу Локка» (хотя я и не вижу оснований для такого названия этого правила²³⁶) и, наконец, «обобщение теории», которое ближе к точному металогическому понятию «расширение формальной системы», чем к традиционному понятию индукции.

Разумеется, указанной выше классификацией не исчерпывается типологическая характеристика обобщений. В частности, если обратить внимание на семантическую новизну обобщения, исключаящую его адекватную смысловую редукцию к понятиям исходного семантического поля, то обобщения дихотомически можно разделить на те, что порождают новые семантические единицы, и те, что их не порождают. Последние, по существу, дают лишь новые «варианты» старых значений. По сравнению с первыми они имеют более простую синтаксическую структуру и часто являются их предельным случаем. Все индуктивные и все дедуктивные обобщения принадлежат к одному из таких типов, причём в смысле данной классификации некоторые дедуктивные обобщения оказываются более информативными, чем индуктивные.

Исторически процесс развития понятий и теорий выражается в приращении знания посредством *цепей обобщений*, звеньями которых служат обобщения первого или второго типов. В цепях обобщений отражаются связи сущностей (абстракций) разных порядков. В зависимости от характера этих связей, им соответствуют цепи обобщений или сохраняющие семантику исходных понятий, или, напротив, изменяющие первичную семантику. Примером первой цепи может служить последовательное обобщение понятия числа, основанное на метрическом представлении о числе (как знаках для «единичных вещей», полученных в процессе счёта или измерения). Эта цепь сохраняет семантику исходной концептуальной базы, хотя здесь приходится обобщать не только понятие о числе, но и понятие о числовых операциях в соответствии с принципом постоянства формальных законов. Цепь такого вида я назвал *индуктивной*, поскольку она не может быть сколько угодно продолжаемой²³⁷. Уже арифметика трансфинитных количественных чисел не удовлетворяет принципу постоянства формальных законов, а канторовский теоретико-множественный подход к общему понятию числа (как *универсалии*, полученной «единым актом абстракции») служит хорошей основой для цепи обобщения второго типа, которая при-

водит к существенно новому пониманию арифметики натуральных чисел как арифметике мощностей конечных множеств, где каждая теорема о «конечных числах» рассматривается как теорема о конечных множествах.

В качестве другого примера цепи обобщения с изменяющейся семантикой исходных понятий можно назвать переход от классической логики к интуиционистской, изменяющий семантику логических связей, или переход от классической механики к релятивистской и к общей теории относительности. При этом общая теория получает законченную формулировку *независимо* от менее общей. Объективная значимость индуктивной цепи определяется в этом случае *принципом соответствия для цепей обобщения с изменяющейся первичной семантикой*, которые я назвал *дедуктивными* (или сходящимися «в себе») цепями: любая дедуктивная цепь обобщения должна содержать в себе соответствующую индуктивную цепь в качестве предельного случая²³⁸.

Индуктивная цепь обобщений — это в известном смысле естественная цепь, воспроизводящая филогенез мысли, своего рода «биографию» понятия в исторической картине его развития. В дедуктивной цепи обобщений, напротив, нет истории, а есть только одна логическая связь понятий, имеющих нередко совсем иной смысл, чем соответствующие понятия родственной ей индуктивной цепи.

Надеюсь, что этим кратким экскурсом в «природу» обобщения я не слишком уклонился от основной темы этой главы. К тому же автор вправе указать на терминологию, существенную для обсуждаемой им темы, которую ему не случалось встречать в чужих статьях или книгах (хотя дедуктивные обобщающие процедуры известны давно) и которая и идейно и методологически принадлежит *интервальному подходу*. Теперь же пора возвратиться к обещанной истории вопроса.

6.3. Платон

Эмпиризм и платонизм — вот два беспримесных типа философской методологии науки, которые завещал нам античный гений. Эмпирики верят в наблюдение и опыт, платоники — в рассуждение и логику. Платоники видят в отдельных единичных вещах (в особенном) лишь тени абстракций. Эмпирики, напротив, в абстракциях видят лишь тени отдельных единичных вещей. Перефразируя выражение Рассела, можно сказать, что преодоление изнуряющей неопределённости этой альтернативы превращает философию в более высокое занятие, чем наука или религия²³⁹.

Возможно, Платону одному из первых принадлежит осознание несовершенства индуктивных доказательств и сократовского метода познания путём анализа наводящих примеров. Правда, понятия чисто дедуктивного доказательства, основанного на законах и правилах логики, Платон не имел. Но его основная концепция «познания в понятиях», применённая к математике, уже формировала определённую *философию математики* (не случайно в наше время названную *платонизмом*), резко противопоставленную эмпиризму и даже более поздним вариантам концептуализма.

Согласно Платону, учение о доказательстве, то есть о том, как наши суждения должны связываться между собой и как они вытекают «сами собой одно из другого»²⁴⁰ — это труднейшая часть философии. Платон называет эту часть диалектикой. Её область — мышление в двух формах его пути к познанию истины (всеобщего): научной — от гипотез к понятиям (к *относительному* знанию о всеобщем) и философской — в движении мысли в сфере чистых понятий (к *абсолютному* знанию о всеобщем).

Хотя в науке речь не об эмпирическом (частном) как таковом, поскольку предмет науки — данное в общих понятиях, всё же Платон полагает, что возможности всякой науки ограничены допущениями (гипотезами) о существовании эмпирических объектов низшего уровня. Поэтому научная мысль «не в состоянии выйти за пределы предполагаемого и пользуется лишь образными подобиями, выраженными в низших вещах, в особенности тех, в которых она находит и почитает более отчётливое выражение»²⁴¹.

Например, при доказательстве теоремы о сумме внутренних углов треугольника (на плоскости) любой геометр, конечно же, использует чертёж, так как он даёт ясное и наглядное представление о содержании теоремы. Однако именно в силу этой наглядной и очевидной для наших чувств предпосылки геометрическая общезначимость объявленного результата доказательства остаётся необоснованной, пока мы эту предпосылку не исключили. По существу, все общие результаты науки (в том числе и математики) имеют вид номологических условных суждений, в которых посылками служат гипотезы *ad discendum et ad demonstrandum*.

Неоспоримо, что бремя перехода от аксиом к теоремам лежит на самой науке. Но также неоспоримо, что бремя обоснования истинности аксиом лежит на философии. И определённый философский ответ на вопрос о том, каким образом частное может оказаться эквивалентом общего, даёт только *теория идей*. Именно она позволяет Платону сказать, что, когда геометры «пользуются чертежами, их

мысль обращена не на чертёж, а на те фигуры, подобием которых они служат. Выводы свои они делают только для четырёхугольника самого по себе и его диагонали, а не для той диагонали которую они начертили. Так и во всём остальном», конкретные эмпирические объекты «служат лишь образным выражением того, что можно видеть не иначе как мысленным взором»²⁴².

Конечно же, Платон, как ученик Сократа, принимал его метод индукции. Но он не видел логического пути от частного к общему. Место логики у него заступает механизм воспоминания (анамнез), возвращения к тому, что было, есть и будет до всякого познания, и для чего частное служит лишь побудительным мотивом. Поэтому Платон не стремится к упрочению абстракций за счёт примеров. Доказательство на примере — это формальный акт в постижении общей истины, которая заключена в общих понятиях, а не в том, чего можно коснуться «при помощи того или иного из чувств»²⁴³.

Создавая свою «методологию доказательства», Платон не отвергал конструктивный метод, основанный на построении фигур (пусть даже и идеальными циркулем и линейкой), но и не поощрял занятия этим методом, поскольку считал, что здесь нет восхождения к познанию геометрических истин «самих по себе», то есть восхождения к *идеям*. В наше время эту мысль Платона повторил А. Пуанкаре, говоря, что конструктивный метод не позволяет нам подняться вверх, к свойствам родовых понятий, «а оставляет всё на том же уровне» абстракции²⁴⁴.

6.4. Аристотель

Две основные темы роднят метафизику Платона и метафизику Аристотеля: первая тема — «общее», вторая — «доказательство». Но если Платон вполне довольствовался метафизикой как искусством, то Аристотель стремился преобразовать метафизику в науку. Поэтому освещение этих тем у Платона и Аристотеля различны.

Тема общего раскрывается Платоном в онтологическом аспекте как тема трансцендентного, как тема «идей» (*actio transiens*). У Аристотеля эта же тема раскрывается в гносеологическом аспекте как тема абстракции (*actio immanens*).

Аристотель, по-видимому, первым начал рассматривать абстракцию как научный метод анализа явлений. И первой абстракцией, которой он пользовался неявно, была *абстракция отождествления*. Не случайно он говорит, что «мы познаём все вещи постольку, поскольку они некоторым образом представляют *одно и то же* (курсив мой — *М.Н.*) и поскольку существует что-нибудь всеобщее»²⁴⁵.

Рассматривать какие-либо вещи с некоторой точки зрения («некоторым образом») как «одно и то же» — значит явно или неявно вводить отношение типа равенства на совокупности (множестве) этих вещей и, как следствие, определять через абстракцию (отождествления) и классы равных в этом отношении вещей (так называемые *классы абстракции*) и — что гносеологически не менее важно — понятие об абстрактном (общем) объекте такого класса (например, понятие об «общем треугольнике» в отличие от данного конкретного треугольника АВС, начерченного мелом на классной доске).

Правда, общее (общий термин), по Аристотелю, «не обозначает некоторую данную вещь», а только «некоторое данное качество вещи». Однако общее «с логической точки зрения идёт раньше», чем любая единичная вещь (сущность), и «более просто», чем она. Наука же, во-первых, имеет дело с тем, что логически раньше, и, во-вторых, с тем, что является более *точным*, а более точным является более простое²⁴⁶. И хотя Аристотель говорит, что «мы не можем... принять, что есть некий дом [вообще] наряду с отдельными домами»²⁴⁷, объективно указанный выше двойной процесс абстракции имеет смысл лишь постольку, «поскольку *существует* (курсив мой — *М.Н.*) что-нибудь всеобщее», физически как бы «растворённое» в вещах и силой абстракции представленное как реалы в системе наших понятий. Таким образом, и об абстрактном мы вправе говорить как о сущем, ведь иначе научное познание, которое всегда направлено «на вещи общие» (сиречь — абстрактные), лишилось бы смысла.

Следовательно, математическим объектам «можно непосредственно приписывать бытие... и притом — бытие с такими свойствами, какие для них указывают математики»²⁴⁸. И поскольку эти объекты суть «чистые формы абстракции», всё, что входит в их доказательство о них, не может быть (единичной) сущностью, а только — абстракцией. Это означает, что в математике доказательства на примерах возможны, если только примеры имеют общий (абстрактный) характер. И по отношению к чувственным объектам «могут иметь место и рассуждения и доказательства, не поскольку они чувственные, а поскольку у них — именно данный характер»²⁴⁹.

Иными словами, доказательство теоремы о сумме внутренних углов треугольника не может относиться к данному чертежу самому по себе, взятому как посылка доказательства, то есть к «этому вот» треугольнику АВС, начерченному мелом на доске, но — только к абстракции «треугольник вообще» (или «общий треугольник»). Что же касается материальных свойств чертежа, то это его привходящие свойства, которые геометрия как наука не изучает. Рисую на доске

данный треугольник ABC, мы не создаём «общий треугольник» как чистую форму абстракции, так что эта единичная посылка является в данном доказательстве *посторонней*. Начерченный треугольник можно стереть с доски, но «общий треугольник» стереть нельзя. А к тому, что стереть нельзя, как раз и относится доказательство.

Сказанное без труда объясняет, почему Аристотель исключил из своей силлогистики (теории доказательства) единичные термины. Это не было ошибкой Аристотеля, как полагал Я. Лукасевич²⁵⁰. Он (Лукасевич) просто смешал гносеологический и лингвистический аспекты проблемы. *Dramatis personae* логического языка (в силу соглашения) — единичные и общие термины²⁵¹. *Dramatis personae* любой научной теории (в силу факта) — всегда и исключительно абстрактные понятия (объекты). Умозаключения с единичными посылками — это умозаключения о случайном (умозаключения топические). Но случайное, согласно Аристотелю, не может служить основой для доказательства. В случае доказательств следует брать посылки как можно более общие.

Аристотель ещё застал практику доказательств теоремы о сумме внутренних углов отдельно для каждого вида треугольников. Поэтому он ищет такой признак в классе всех треугольников, который позволил бы говорить об «общем треугольнике» и, соответственно, о доказательстве общей теоремы²⁵². Рассуждения его не слишком отчётливы, но цель ясна: необходимо выделить (абстрагировать) «общий треугольник» как функцию от равных в определённом смысле (по данному признаку) объектов, то есть отношение равенства свести к тождеству, обеспечив таким путём существование и единственность искомого абстрактного объекта (понятия). Этот абстрактный объект («общий треугольник») Аристотель называет *первичным* в доказательстве и полагает, что нечто доказано для любого (произвольного) объекта в данном классе, если оно доказано для первичного. Именно (и только) возможность такого доказательства общего обеспечивает математике её дедуктивный характер, ведь «посредством чувственного восприятия невозможно знать что-либо, требующее доказательства»²⁵³ и «нельзя получить необходимого вывода (силлогизма), что у этого вот треугольника углы (в сумме — *М.Н.*) равны двум прямым, если они не у всякого треугольника составляют два прямых»²⁵⁴.

В этом последнем утверждении Аристотеля заключено кредо любой дедуктивной науки: логическими следствиями из аксиом можно считать только такие утверждения теории, которые не изменяют (и, естественно, не увеличивают) информацию, содержащуюся в аксиомах. В этом разумный смысл определения логического знания и понятия доказательства, принятого Аристотелем.

Утверждая доказательство как дедуктивный процесс, Аристотель понимал и необходимость эмпирических обобщений в практике научного исследования. Более того, он считал, что наука возникает опытным путём, так что общее — аксиоматическую основу дедуктивных наук (аксиомы и постулаты, закреплённые в суждениях, невыводимых теоретически), нельзя рассматривать, игнорируя определяющую роль индукции, последняя же «невозможна без чувственного восприятия»²⁵⁵. И хотя, добавляет Аристотель, чувственное восприятие не может служить логическим аргументом для доказательства, всё же «кое-что в проблемах возникает из-за отсутствия восприятия, ибо некоторые предметы мы больше не исследовали бы, если бы их видели... хотя мы видели бы это отдельно в каждом отдельном случае, но вместе с тем мыслили бы, что так обстоит дело во всех случаях»²⁵⁶.

Со стороны Аристотеля это не было уступкой индуктивизму. Но, быть может, именно эти слова Аристотеля впоследствии дали повод его античному комментатору Александру Афродизийскому сказать, что и в логике возможны и допустимы ситуации, когда «доказательство получается через чувственное восприятие, а не по... модусу и не силлогистически»²⁵⁷.

6.5. Томас Гоббс

Для нашей темы этот философ интересен прежде всего совместностью в одном лице двух, казалось бы несовместимых, установок — эмпиризма и рационализма. Гоббс был эмпириком, и ему, а не Дж. Локку, принадлежит известный афоризм: нет ничего в интеллекте, чего прежде не было бы в чувстве. Но в то же время Гоббс «был приверженцем математического метода не только в чистой математике, но в её приложениях»²⁵⁸.

Правда, рационализм Гоббса не походил на платоновский. Это был *номиналистический рационализм*, что отчасти избавляло его философию от внутренних противоречий. Из античных предшественников Гоббса можно, пожалуй, назвать ранних стоиков, положивших эмпирический аргумент в основу теории познания, а дедуктивный аргумент (дедукцию) — в основу теории доказательства. Согласно Гоббсу, наш опыт складывается из восприятий, но из опыта «нельзя вывести никакого заключения, которое имело бы характер всеобщности»²⁵⁹. Восприятие только индуцирует исследования относительно его последствий. Поэтому Гоббс дополняет эмпирический аргумент лингвистическим: наблюдаемые связи (последова-

тельности событий) обобщаются в словах и при помощи слов сводятся к общим правилам, называемым теоремами. Именно с этой поправкой на обобщающую функцию слова следует принимать допустимость перехода от частного (единичного как источника познания) к общему. Любой человек, «умеющий пользоваться словами, заметив, что равенство (суммы углов треугольника двум прямым — *М.Н.*) обусловлено не длиной сторон, не какой-либо другой особенностью его треугольника, а исключительно тем, что у него прямые стороны и три угла, и что это всё, за что он назвал его треугольником, смело выведет всеобщее заключение, что такое равенство углов имеется во всех треугольниках без исключения, и регистрирует своё открытие в следующих общих терминах: *три угла всякого треугольника равны двум прямым углам*. Таким образом, последовательность, найденная в одном частном случае, регистрируется и запоминается как всеобщее правило, что избавляет наш процесс познания от моментов времени и места, а нас — от всякого умственного труда, за исключением первоначального, а также превращает то, что мы нашли истинным *здесь и теперь, в вечную и всеобщую истину*»²⁶⁰.

В приведённом отрывке индуктивность перехода к общему случаю только кажущаяся. Решающая роль, по мысли Гоббса, принадлежит здесь *определению* и основной аргумент — номинальный: определение «даёт *общее понятие* (курсив мой — *М.Н.*) определяемой вещи, являясь общим образом для ума, а не для глаза»²⁶¹. Гоббс отклоняет версию о существенной роли чертежа в доказательстве. Доказательство состоит не в «наглядном показывании», как полагали античные геометры, и неверно, что «без помощи фигур истина... не может стать очевидной»²⁶². Но коль скоро мы хотим говорить о геометрическом доказательстве в собственном смысле, оно должно быть чистой дедукцией, основанной на определениях и силлогизмах: «во всех отраслях науки определения должны стоять на первом месте, чтобы сделать возможным истинное доказательство»²⁶³.

Руководствуясь *интуицией общности*, которую Гоббс неявно нам представляет, можно превратить гипотезу о сумме внутренних углов треугольника в постулат, эквивалентный пятому постулату Евклида. Но достаточно ли одних определений для чистой дедукции? Можно ли из одного только (определения) общего понятия «треугольник» вывести общую теорему о сумме его внутренних углов? Об этом Гоббс не говорит ничего. И здесь уместно привести любопытную ремарку Аристотеля: «иметь углы, равные двум прямым, является для треугольника акциденцией, то есть чем-то, что может быть и не быть»²⁶⁴.

Впрочем, у Гоббса был весомый аргумент в защиту номинального (конвенционального) характера определений, отделивший его философию математики от философии Дж.Локка и других английских эмпириков.

Согласно Гоббсу, наука не является видом знания. Это — область творчества. В науке речь идёт не о достоверности фактов, но об универсальных истинах — об общих чисто теоретических утверждениях (законах науки). Поэтому наука в принципе дедуктивна: это система рассуждений из общих положений посредством «правильной дедукции» — либо дедукции a priori, как в чистой (скажем, классической) математике, либо дедукции a posteriori, как в прикладной (или скажем, конструктивной) математике, математической физике и других науках о природе. При этом главная особенность чистой математики в её полной независимости от опыта, в абстрактности её понятий. Поэтому теоремы чистой математики (для Гоббса) — это аналитические истины: в процессе априорной дедукции мы только развёртываем содержание созданного нами объекта. В частности, «для познания любого свойства фигуры требуется лишь, чтобы мы сделали все выводы из той конструкции, которую мы сами построили при начертании фигуры»²⁶⁵.

Очевидно, что такой подход не нуждается в особом логическом условии непротиворечивости исходных понятий, поскольку конструктивное (хотя и номинальное) определение понятия «через построение» естественно гарантирует существование определяемого предмета. Поэтому более поздняя лейбниевская замена номинальных определений реальными едва ли существенно улучшила гоббсовскую философию математики.

6.6. Джон Локк

Этот философ принадлежал к тому типу мыслителей, для которых «понятие реальности неизбежно совпадает с реальностью вещей, познаваемых при посредстве внешних чувств, — вещей, индивидуальность которых реальна, если её противопоставить абстрактной идее»²⁶⁶. Между тем центральное понятие локковской теории познания — понятие идеи — столь широко, что трудно без каких-либо оговорок окрестить эту теорию как чистый эмпиризм, хотя Локк солидаризируется с философией Гоббса именно в той её части, в какой эта философия эмпирична и номиналистична. Пользуясь классификацией Карла Юнга, для которого рациональность является общей «психологической установкой» как платонизма, так и эмпиризма, можно сказать, что Локк отклоняет «логический рационализм» Гоббса, но принимает его «сенсуалистический рационализм».

Однако и это не даёт ещё оснований для характеристики Локка как эмпирика. Утверждение, что «всякое общее познание мы можем искать и находить только в собственном уме; и только изучение наших собственных идей даёт нам такое познание»²⁶⁷, — это по меньшей мере уступка априоризму, признание права ratio на собственную, независимую от опыта, обработку материала, заключённого в идеях.

Лишь отрицательный ответ на вопрос, существует ли лучший способ «получения ясных и отчётливых идей, чем тот, при котором мы получаем их посредством чувств», выдаёт эмпирика, вряд ли способного согласовать свой эмпиризм с декларируемой им «несомненностью» и «достоверностью» математических абстракций «в приложении к реально существующим вещам». Когда Локк говорит, что существовать математически — значит существовать «совершенно точно», он понимает точность, как её понимают физик или инженер. В частности, он пишет: «Кто приобрёл идею треугольника и нашёл способ *измерить* его углы и их величины, тот знает достоверно, что сумма его трёх углов равна двум прямым, и может сомневаться в этом так же мало, как и в истине “невозможно, чтобы одна и та же вещь была и не была”»²⁶⁸.

Мы видим, что Локк не отличает истины разума от истин факта, что отличал уже Гоббс и что позднее Лейбниц сделает основой своей философии. И я не могу удержаться, чтобы не привести обширную цитату из лекций Людвиг Витгенштейна, корректно и образно как бы полемизирующего с Локком: «Ты можешь думать, что человек в состоянии при помощи измерения углов треугольника достичь экспериментально или предвидеть из своего опыта то, что он доказал позднее, а именно, что сумма углов треугольника равна двум прямым углам. Но это не так: то, что он *доказывает*, — это нечто совсем другое по сравнению с тем, что он достигает или предвидит в качестве результата эксперимента... Геометрия не извлекает пророчества, но говорит, что если результат измерения углов треугольника даёт 181, то значит в измерении была допущена ошибка»²⁶⁹.

Сказанного, думаю, достаточно, чтобы заподозрить гносеологическую позицию Локка во внутренней противоречивости, хотя Локк постоянно пытается «вынырнуть» из этого противоречия, делая шаги то в сторону платонизма и априоризма, то в сторону догматического эмпиризма и скептицизма²⁷⁰.

Однако меня сейчас интересует не локковская философия в целом, а подход Локка к решению того скромного вопроса, с которого я начал эту главу: каким образом «частное» может служить эквивалентом «общего» в практике математических доказательств.

Известно, что в истории философских учений общая постановка этого вопроса конкретизировалась, как правило, на примере теоремы о сумме внутренних углов треугольника. Это было, по-видимому, не случайно, поскольку сама теорема тесно связана с содержанием постулата о параллельных линиях, издавна волновавшего научный мир. Со временем ссылка на эту теорему превратилась в своего рода троп, в метафору, заменяющую абстрактное обсуждение вопроса. Но Локк отступает от этой практики. Для него именно пример приобретает собственное значение, но не в контексте логического вывода частного из общего, а в контексте его теории общих идей.

Вот что пишет Э.Бет в связи с теорией Локка: «Локк этот вывод толкует таким образом, что доказательство с самого начала относится не к особому треугольнику (например, треугольнику, начерченному на доске — *М.Н.*), а к “всеобщему треугольнику” и как раз в силу этого оно должно вести к выводу об общезначимости»²⁷¹. При этом Бет ссылается на то место из сочинения Локка, где последний говорит о трудности, но необходимости составить *общую идею треугольника*, которая «не должна быть идеей ни косоугольного, ни прямоугольного, ни равностороннего, ни равнобедренного, ни неравностороннего треугольников; она должна быть всеми ими и ни одним из них в одно и то же время»²⁷².

В свете соображений, высказанных уже Аристотелем, было бы слишком поспешно говорить о невозможности такой общей идеи, как это, оппонировав Локку, заявлял Дж.Беркли. Но, справедливости ради, отмечу, что Локк и сам был невысокого мнения о конструктивности общих идей, поскольку, являясь абстракциями довольно высокого порядка, они, в отличие от представлений, не подкрепляются столь дорогим для Локка свидетельством внешних чувств. Поэтому, кроме этого — *абстрактного* — пути оправдания математических общих суждений, Локк ищет другой — *конкретный* путь. Если всякое общее знание заключено только в нашем уме, а не всякая общая идея, порождённая в этом уме, отчётлива и достоверна, то истинность и общность знания надо искать в характере связи между идеями, в отношениях между ними. Тогда критерием истины становится непосредственное восприятие этих отношений²⁷³. В этом случае «ум воспринимает истину, как глаз воспринимает свет». Такое познание Локк называет интуитивным, и от «*интуиции*» зависит всецело достоверность и очевидность нашего познания». Интуиция для Локка выше логики, как и вообще любого дискурса: «*познание, основанное на доказательстве*, гораздо менее совершенно, чем *интуитивное*»²⁷⁴. Как инстанция более высокая, интуиция необходима для оценки всех звеньев доказательства и заключения о пригодности доказательства в общем случае²⁷⁵.

Математическое доказательство, согласно Локку, может быть только частным. Поэтому математика нуждается во внелогических критериях его общности. Ведь «если бы кто доказал какое-нибудь положение для одного треугольника или круга, его знание не вышло бы за пределы данной отдельной фигуры»²⁷⁶.

Мы видим, что в этом фрагменте Локк совершенно забывает о своей идее «общего треугольника», указывая тут же на иной критерий перехода от частного знания к знанию общих положений. Этот, пожалуй главный для него, критерий состоял в следующем: если мы однажды что-либо доказали на частном примере, то в последующем мы можем пользоваться этим обстоятельством неограниченно, не осуществляя новых доказательств, поскольку за это ручается принцип сохранности тех же самых отношений между теми же самыми неизменными вещами²⁷⁷. Говоря иначе, для обоснования перехода от частного к общему Локк привлекает идею тождества в той её форме, которую я называю *абстракцией постоянства*. Но нетрудно сообразить, что такой подход — это просто перестановка спорного вопроса (*ignoratio elenchi*). Никто, конечно, не сомневается, что, «если три угла (в действительности их сумма — *M.H.*) треугольника были некогда равны двум прямым, они всегда останутся равны двум прямым», коль скоро речь идёт о геометрическом треугольнике. Но утверждать, что на «этом именно основании частные доказательства дают в математике общее знание»²⁷⁸, значит подменять вопрос. Речь не о том, что гарантирует сохранность однажды полученного знания, а об источнике общего знания, коль скоро наш опыт ограничен частными примерами. В первом случае квантор общности «бежит по моментам времени» и имеет чисто онтологическое (или, если хотите, гносеологическое) оправдание. Во втором случае квантор общности «бежит по объектам теории», и его появление должно иметь логический смысл.

Итак, хотя Локк и не уходит от решения вопроса нашей темы, он не улавливает дедуктивный механизм обобщения в рамках математических доказательств, полагая, что достаточно сослаться на принцип сохранности отношений. И этот аргумент Локка можно было бы принять во внимание, если бы его смысл был таков: доказательство, проведённое на особом треугольнике ABC, является общим, поскольку его можно повторить на любом другом треугольнике, ведь условия, существенные для первого доказательства, полностью сохраняются и для всех последующих доказательств на других примерах. Иначе говоря, доказательство на примере равносильно общему доказательству в таких ситуациях, когда *общность* состоит *в методе*

доказательства, а не в объектах применения этого метода. Обобщить — значит сделать так, чтобы различное можно было бы рассматривать как «одно и то же». В нашем случае этим «одним и тем же» является именно метод доказательства.

Так, или почти так, понимала суть дела и С.А.Яновская, которая в своей последней прижизненной публикации связала решение нашего вопроса с именем Локка. Рассмотрев один из конкретных случаев применения правила полной математической индукции, она отмечала, что это правило «позволяет сводить (при определённых условиях) доказательства, осуществляемые по-разному для разных *a*, к таким доказательствам, которые выполняются одинаково для *любого n*, если доказывают что-либо для *всех n*... Этот последний способ доказательства общих предложений, называемый иногда “правилом Локка”, и есть принимаемое обычно в исчислении предикатов правило “обобщения”, или “введения квантора общности”, позволяющее из... того, что теорема доказана для равнобедренного треугольника АВС, сделать заключение, что она верна для всех равнобедренных треугольников»²⁷⁹.

Я оставляю в стороне вопрос о тождественности правила универсального обобщения (\forall -обобщения) логики предикатов и правила полной математической индукции. Я отрицательно ответил на этот вопрос в своей диссертации. Но тогда же я усомнился и в том, чтобы называть это правило (по крайней мере, в чистой логике предикатов) именем Локка²⁸⁰. Конечно, упоминание имени философа индуктивистской (и даже интуитивистской) ориентации в связи с чисто формальной процедурой \forall -обобщения в логике предикатов само по себе любопытно. Но, к сожалению, Яновская не указала, на каком основании и кому принадлежит инициатива называть это правило «правилом Локка». Предыдущий анализ локковской философии математики как будто бы не даёт для этого никаких оснований. Только идея «общего треугольника» могла бы послужить подходящим поводом к этому. Но для действительного развития этой идеи Локк сделал не больше, чем Платон или Аристотель²⁸¹.

6.7. Готфрид Лейбниц

Лейбниц был первым из великих философов, кто систематически и с полным пониманием откликнулся на философию Локка. Этот отклик звучал уважительно и деликатно, хотя, по существу, по признанию самого Лейбница, его взгляды и взгляды Локка «сильно отличаются друг от друга».

В контексте нашего вопроса главное в возражениях Лейбница на локковскую теорию обоснования предложений заключено в следующих словах: «я не согласен с вашим утверждением, будто в математике частные доказательства на чертеже доставляют общую достоверность. Надо знать, что доказательства геометрам доставляют не чертежи, хотя эстетическое изложение заставляет так думать. Сила доказательства независима от чертежа, служащего только для облегчения понимания того, что желают сказать, и для фиксирования внимания. Доказательства основаны на общих положениях, т.е. на определениях, аксиомах и доказанных уже теоремах, хотя бы при этом не было никакого чертежа»²⁸².

Лейбниц даже замечает, что чертежи можно было бы вовсе устранить, чего, однако, никто до сих пор не делает, во-первых, в виду особой наглядности чертежей (их конструктивного характера), а во-вторых, в виду явного понимания их *постороннего* характера для логической сути доказательства.

Правда, Лейбниц не исключает *топические доказательства*, основанные на подобиях и примерах. Но такие доказательства не являются для него строгими (точными) в математическом смысле. Строгими он считает только те, которые имеют «предписанную логикой форму», и строгость которых он видит в методичности их построения, в представлении доказательства в виде цепочки последовательных шагов, каждый из которых либо оправдан логически, либо является «непосредственным чувственным подтверждением» правильного хода мысли. Последнее выражение Лейбниц не разъясняет. Но можно предположить, что речь идёт о ситуациях, когда отчётливое познание даётся только *интуитивно*, а это возможно лишь для первичных простых понятий.

Мы помним, что Локк ставил интуицию выше доказательства, основанного на чистой логике. Лейбниц, напротив, включает интуицию в состав логического доказательства, поскольку подтверждение правильности каждого шага такого доказательства имеет вполне наглядный (интуитивный) характер непосредственного умозаключения в смысле современной логики²⁸³.

Мы помним также, что Локк общность доказательства теоремы о сумме внутренних углов треугольника связывал с идеей «общего треугольника», т.е., строго говоря, с понятием *абстрактного объекта*, к которому он и относил доказательство. Лейбниц, по существу, обходит этот пункт в рассуждениях Локка. Но, по-видимому, он осуждал практику применения абстрактных понятий вообще, принимая во внимание их неизменно творческий характер и «темноту».

Ведь ещё задолго до знакомства с сочинением Локка, критикуя схоластический стиль философствования, Лейбниц писал: «*в строгом философствовании следует пользоваться только конкретными терминами... заменять конкретные термины абстрактными... — это значит не только прибегать к тропам, но и делать нечто излишнее*»²⁸⁴. Принцип абстракции, фиксирующий особую познавательную роль отношений типа равенства в образовании абстрактных понятий, Лейбницу не был знаком, как не был он знаком и Локку.

6.8. Джордж Беркли

Философия Беркли — это откровенный разрыв с концептуализмом Локка, возвращение к номинализму и «чистым» принципам эмпиризма. Примечательно, что Локк, придерживаясь известной максимы эмпиризма *nihil est in intellectu quod non prius fuerit in sensu*, попытался сочетать её с далеко ведущим методом абстракции, который к тому времени господствовал на континенте в рационалистической школе Декарта, где защищался тезис, прямо противоположный тезису эмпиризма: «ни одна идея в нашем уме не происходит из чувств»²⁸⁵. Более того, именно в картезианской школе был принят термин «идея» в том его значении, которым воспользовался Локк в своей «теории идей». Трудно сказать, было ли это локковским компромиссом с рационализмом или примером скрытой полемики с ним с целью приспособить важное оружие противника для собственной защиты, то есть для защиты эмпиризма от обвинений в плоском мышлении. Важно однако другое. Как заметил Рассел, попытка Локка справиться с проблемой всеобщности понятий оказалась неудачной, а его теория абстрактных идей — неубедительной²⁸⁶.

Критика этой теории и стала отправным пунктом философии Беркли. Резюме этой критики элементарно: учение об абстрагировании как методе образования понятий, из какой бы философской школы оно не исходило, противно здравому смыслу. При этом главный аргумент Беркли — аргумент *ad hominem*: философ заявляет, что он не в состоянии каким бы то ни было усилием мысли образовать абстрактную идею, и полагает, что в основном и другие люди не обладают такой чудесной способностью и никогда не притязают на абстрактные понятия²⁸⁷. Очевидно, что Беркли не видел смысла не только в устранении неясностей в локковской концепции абстракции, но и в разработке какой-либо конструктивной теории абстракций вообще. Поэтому он не нашёл лучшего пути для объяснения со-

держания понятий, чем вернуться к «образной» концепции Пьера Гассенди, отбросив даже то небольшое в уточнении вопроса, что ещё до Локка дали авторы логики Пор-Рояля.

Сравнительно легко обойдя проблему абстракции (просто отбросив эту проблему), Беркли не мог проигнорировать главную проблему теории познания — проблему общих утверждений, их обоснования и их истинности. Претензия на «полное исследование относительно первых принципов *человеческого знания*»²⁸⁸ обязывала дать ответ о природе нетривиальных обобщений, где нам, по выражению А.Пуанкаре, приходится мысленно «перескакивать бездну». При этом пример, указанный Аристотелем, Гоббсом и Локком, должен был получить иное объяснение. Если Локк в обоснование общезначимости мог сослаться на абстрактную идею треугольника, то в распоряжении Беркли были только эмпирические (частные) треугольники («particular triangle»), и задача состояла в том, чтобы объяснить переход от частного к общему, избегая индукцию.

Подход, который для решения этой задачи демонстрирует Беркли, можно назвать (по желанию) прагматическим или семиотическим: обобщать можно то, что позволительно не различать. Но общее не является результатом абстракции. Это результат употребления единичной вещи в некоторой «замещающей» знаковой функции: «слово становится общим, будучи знаком... многих частных идей», а «известная идея, будучи сама по себе частной, становится общей, когда она представляет или заменяет все другие частные частные идеи того же рода»²⁸⁹. Можно сказать иначе: Беркли усматривает общность в смысловом значении конкретных идей или вещей, объединённых некоторым подстановочным контекстом.

Следовательно, Беркли не отрицает необходимость общего, но он (к примеру, в отличие от Аристотеля) разделяет «общее» и «абстрактное», принимает первое и отбрасывает второе. При этом его объяснение пресловутого примера таково: «когда я доказываю какое-нибудь предложение, касающееся треугольников, то предполагаю, что я имею в виду общую идею треугольника», но эту идею надо понимать не в смысле Локка, а «только так, что частный треугольник, который рассматривается мной, безразлично, будет ли он того или иного рода, одинаково заменяет или представляет собой все прямолинейные треугольники всякого рода и в этом смысле он *общ*»²⁹⁰.

Итак, для Беркли, в отличие от Платона, истина заключена не в абстрактных понятиях, а в том, чего можно коснуться «при помощи того или иного из чувств». Эта истина дистрибутивна в силу отноше-

ния сходства между вещами. И тут Беркли волей-неволей приходит к тому, о чём говорил Аристотель: «мы познаём вещи постольку, поскольку они некоторым образом представляют одно и то же».

По существу, Беркли отступает от заявленных ранее принципов, когда возвращает права элементарной абстракции: «человек может рассматривать фигуру просто как треугольную, не обращая внимание на определённые свойства углов или отношения сторон. До этих пор он может абстрагировать»²⁹¹. Такая абстракция совершенно необходима, чтобы доказательство на частном примере можно было бы считать общим. Но она и достаточна, поскольку в этом случае индивидуальные свойства того или иного частного треугольника совсем не упоминаются (не участвуют) при доказательстве теоремы. Можно сказать, что «безабстрактная методология» Беркли не состоялась.

6.9. Давид Юм

Разделяя концепцию Беркли относительно природы общих понятий, Юм, однако, не высказывается против стандартного процесса абстрагирования. Но в сопоставлении понятия объекту он усматривает чисто внешнее отношение именованию. Согласно Юму, никакой процесс абстрагирования не может изменить основного: абстрактные понятия «сами по себе единичны, хотя в качестве представителей (in their representations) они могут стать и общими»²⁹². Общность единичной вещи зависит от того, как мы используем эту вещь. Но Юм дополняет свою концепцию важным понятием о «классах частных идей», которые могут формироваться по любому отношению сходства. Он утверждает, что в каждом таком классе неизбежно возникают ассоциативные связи, избавляющие нас от ошибок в случае любых возможных умозаключений (доказательств) от частного к общему. При этом обоснование и фильтрация ошибок обеспечивается *методом контрпримера*, который приходит нам на ум всякий раз, когда мы пытаемся частную истину выдать за общий результат.

Эта идея контрпримера, столь важная для логической дедукции вообще, привлекла особенное внимание Бета, который сослался в этой связи на следующую цитату из Юма: «как только ум производит единичную идею, служащую предметом нашего суждения, сопутствующая ей привычка, пробуждённая общим, или абстрактным, именем легко подсказывает нам другую единичную идею, в случае если наше суждение не согласуется с последней. Так, если мы, упомянув слово *треугольник*, образуем при этом отвечающую ему идею

отдельного равностороннего треугольника и станем затем утверждать, что три угла треугольника равны друг другу, то другие единичные идеи равностороннего и разностороннего треугольника, которые мы сперва оставили без внимания, немедленно предстанут перед нами и заставят нас заметить ложность этого положения»²⁹³.

Из приведённого рассуждения Д. Юма нетрудно извлечь простое, но важное правило доказательства корректности общих суждений. В самом деле, если мы хотим доказать (получить свидетельство истинности) какого-либо из таких суждений, опирающегося на частную идею, надо попытаться найти такую другую частную идею того же рода (отличную от первой), подстановка которой на место первой идеи во всех её вхождениях в рассуждение (умозаключение), которое привело нас к общему суждению, сделала бы посылки этого рассуждения истинными, а заключение ложным. Когда такая подстановка существует, она образует контрпример для данного рассуждения, то есть опровергает его. Когда такая подстановка невозможна, рассуждение корректно, и обобщение, полученное согласно ему, хотя это обобщение и сделано на основе частной идеи, будет верным результатом логической дедукции.

Этот юмовский аргумент является, конечно, важной вехой в «естественной истории доказательств» (термин Крайзеля). Оценивая его, Бет замечает: «Несмотря на психологический характер своего объяснения, Юм, как я полагаю, ближе всех подошёл к решению проблемы»²⁹⁴. Однако этот аргумент совершенно беспомощен в общем случае, когда число возможных подстановок бесконечно велико или просто практически неосуществимо. Чтобы заставить этот аргумент «работать», необходимо создать подходящую систему правил для поиска контрпримеров, но до этого в юмовскую эпоху было слишком далеко. Такая система правил была, как известно, найдена самим Бетом и представлена в его методе семантических таблиц²⁹⁵. Неудивительно, что Бет выбирает именно этот метод решения проблемы, которую он называет «известной проблемой Локка — Беркли», в качестве окончательного и причём такого, которое, по его мнению, обеспечивает полностью дедуктивный характер обобщения, хотя и опирается на принцип частной посылки. При этом Бет оспаривает мнение Я. Лукосевича, что доказательство при помощи восприятия не является логическим. В частности, Бет пишет: «я считаю такой взгляд лишённым всякого основания. Представленная... дедукция (речь идёт об обосновании аристотелевского модуля CAMESTRES методом семантических таблиц — М.Н.) имеет как раз характер доказательства с помощью примера, точно описанного Александром,

поскольку был выбран “собственно” индивидуальный объект a . Подобная дедукция “естественна” в том смысле, что её всегда можно использовать, если нет другого заранее намеченного подхода к доказательству и можно лишь представить себе точное значение посылок и выводов. Такая дедукция абсолютно *убедительна* и чисто *логическая*»²⁹⁶.

6.10. \forall -обобщение и принцип абстракции

Аргументация Бета, вообще говоря, бесспорна, но в данном случае она опирается на классические принципы доказательства от противного, и в этом смысле она уязвима для интуиционистской критики. Это ставит нас в контекст гносеологических обсуждений, затрагивая проблемы философского характера, связанные с *duplex negatio* и *tertium non datur*. Интуиционист, конечно же, предпочтёт прямое доказательство косвенному, если последнее зависит от названных выше принципов, а первое опирается только на интуицию общности (по А.А. Маркову) и абстракцию отождествления. Конструктивное понимание общих суждений позволяет утверждать истинность $\forall xA(x)$, если возможность осуществить конструктивное доказательство $A(x)$ по любому x представляется совершенно очевидной на частном примере доказательства для некоторого a . С такой именно ситуацией Марков и связывает понятие об интуиции общности²⁹⁷. С.К. Клини называет подобный частный случай проверкой общей теоремы, полагая, что доказательство при этом «состоит в том, что метод, использованный в этом частном случае, *оказывается общим* (курсив мой – *М.Н.*), т.е. приложим ко всем случаям. Таким образом, иллюстрация на частном случае демонстрирует некоторый тип рассуждения, применимый ко всем случаям. В тех случаях, когда это ... очевидно, можно опускать проведение доказательств в общих терминах»²⁹⁸. Ясно, что, хотя для Клини очевидность не является последней инстанцией, она всё же допустима как критерий истины.

Стоит, однако, отметить, что никакой умозрительный принцип (в том числе и интуиция общности) не позволяет нам утверждать, что из доказанности $A(a)$ *логически следует* доказанность $\forall xA(x)$, то есть $A(a) \vdash \forall xA(x)$. Допустимо лишь более слабое утверждение: если $\vdash A(a)$, то $\vdash \forall xA(x)$.

Чтобы принять последнее, вполне разумно сослаться на очевидность, если полагать, как это делают интуиционисты, что для понимания математических истин достаточно «ясного научного сознания» и что логика, являясь частью математики, «не может служить для её обоснования»²⁹⁹; или же (что почти то же, что предыдущее) верить,

вслед за Кантом, что «математика может исследовать общее in concreto (в единичном созерцании) и тем не менее с помощью чистого представления a priori»³⁰⁰.

Чтобы принять первое, необходимо логическими средствами (а не ссылкой на умозрение) показать, что истинность $A(a)$ от выбора a действительно не зависит. Но если a — постоянная (пусть даже и произвольно взятая), то в рамках чистой логики мы не можем относительно a высказать (получить) ничего более общего, чем то, что уже установлено (доказано) относительно $A(a)$. Чтобы утверждать логическое следование $\forall x A(x)$ из $A(a)$ необходимо доказать равносильность этих формул, а это, разумеется, невозможно. Вот почему в сигнатуре чистой логики просто нет постоянных в собственном (аутентичном) смысле этого понятия, а всякое косвенное доказательство, обращённое к примеру (в том числе и доказательство методом семантических таблиц), представляет собой *прикладной формализм*.

Я позволю себе на этом остановиться в изложении чужих точек зрения на интересующий нас предмет и перейти к изложению собственной точки зрения на проблему, которую я, в отличие от Бета, предпочитаю называть «проблемой Аристотеля — Беркли — Локка», поскольку её первая постановка всё-таки восходит к античности.

Я думаю, что в заочной полемике великих философских авторитетов проявились контуры двух аспектов одной и той же логической процедуры. Локк как бы предчувствовал творческий характер определений через абстракцию, но только нащупывал путь к общему понятию (классу абстракции) как функции равных в некотором смысле объектов, а Беркли, отвергая общие абстрактные понятия, предпочёл реализацию того же принципа посредством конкретных представителей общих понятий. В первом случае опора на абстракцию очевидна. Во втором она замаскирована идеей представительства, но явно проявляется в том, что любой представитель (по определению) — это значение функции (абстрактного понятия!), определённой так, что каждому объекту из множества равных, она сопоставляет один и тот же (выбранный нами) объект из этого же множества — его эталон³⁰¹. Отношению «быть равным» («быть эквивалентным») Беркли предпочитает отношение «быть эталоном», не подозревая, что эти отношения равносильны и что в основе любого из них лежит *абстракция отождествления*.

Как я уже отмечал в начале этой главы, Евклид не был озабочен проблемой «общего случая» как проблемой логической. Видимо, он считал вполне очевидной истиной, что верное в одном случае будет верно и во всех аналогичных. Этим «одним случаем» был для Евкли-

да пример. Но пример в дедуктивной теории является всего лишь «рабочей посылкой» доказательства, если он не подкреплён чем-то вроде интуиции общности или какой-либо иной возможностью обоснования общей теоремы. Используя пример, мы должны его исключить, заменив его утверждением совершенно общего характера. По существу, мы должны *доказать* теорему: «если что-то верно для данного случая, то это верно для любого случая из класса случаев определённого рода».

Осознание необходимости такой логической работы пришло значительно позже эпохи Евклида у предтеч неевклидовой геометрии. Оно было обязано всё тому же постулату о параллельных, то есть одной из посылок в доказательстве теоремы о сумме углов. Но и тогда всё ещё оставался открытым поставленный Аристотелем вопрос: «когда доказательство чего-нибудь есть доказательство общего?»³⁰². Ответ, по существу, сводился к отысканию некоторых принципов, которые позволяли бы согласовать *конечный опыт и знание о бесконечном*. Для числовых объектов (для теории чисел) такой принцип А. Пуанкаре усматривал в доказательствах по рекурсии. Но что можно сказать об этом для случая других теорий, в частности, для пространственных объектов геометрии?

Много лет назад я попытался уложить два принципа — дедуктивный и индуктивный — в одну, общую, схему доказательства³⁰³. Разбирая случай теоремы о сумме углов треугольника, я рассуждал примерно так: поскольку речь идёт об обобщениях дедуктивных теорий, правила таких обобщений должны отвечать дедуктивному характеру доказательств в этих теориях. Но поскольку результат их применения должен быть «истинным обобщением», выражающим акт познания, родственной индуктивному переходу от частного к общему, эти правила не могут быть и правилами «чистой логики», ведь если верить тому же Канту, все теоремы геометрии являются синтетическими суждениями, хотя и имеют при этом априорный характер. Следовательно, путь, которым шёл Аристотель, а позднее Локк со своей идеей *общего треугольника*, и Беркли, и Юм с их идеей *абстрактного представителя*, в этом случае может оказаться более всего соответствующим сути дела.

В самом деле, правило \forall -обобщения чистой логики разрешает универсальное замыкание открытой формулы $A(x)$, если эта формула была выведена и при этом переменная x либо не имела свободных вхождений в посылки данного вывода, либо же вовсе не встречалась в его посылках. При таком условии истинность $A(x)$ не зависит от свободных вхождений x , так что формуле $A(x)$ без каких-либо «ин-

дуктивных оснований» может быть придана интерпретация всеобщности. Отсюда законность обобщения, выраженного в формуле $\forall xA(x)$, которое здесь, по существу, тавтологично, или, другими словами, является аналитическим. Как иронически отметил Рассел, «абстрагируясь от отдельных случаев, мы в итоге остаёмся ни с чем»³⁰⁴.

Но когда x в посылках вывода свободна, доказательство может зависеть от конкретных значений, которые в процессе доказательства могут быть приданы этой переменной (что, в сущности, и делается в доказательстве на частном примере), а это не обязательно *все* значения из области возможных значений переменной x , но обычно те, которые обозримы в данном случае и для которых уже дано доказательство. Однако для каких-то других значений x (не входивших в доказательство) $A(x)$ может оказаться ложной. Именно поэтому и возникает необходимость в обосновании общего заключения $\forall xA(x)$.

И Бет, и интуиционисты объясняют, как обосновать такой переход, не теряя идею единичного примера, то есть сохраняя синтетический характер доказательства. Но можно ли его обосновать, не прибегая при этом к доказательству от противного и отказываясь от каких-либо интуитивных критериев очевидности?

Видимо, можно, если воспользоваться тем обстоятельством, что в данном случае «мы заинтересованы в том, чтобы заставить переменную пробегать не весь универсум, а лишь некоторую его часть»³⁰⁵. Я напомним, что, по Колмогорову, смысл общего утверждения $\forall xA(x)$ определяется как требование «указать общий метод, который позволил бы решить проблему A для каждого произвольного x »³⁰⁶. Я полагаю, что одним из таких методов (когда речь идёт о 32-ом предложении I книги «Начал» Евклида), кроме тех методов, о которых говорилось выше, может быть *метод абстракции*, основанный, во-первых, на применении *ограниченных кванторов* и, во-вторых, на том замечательном обстоятельстве, что в интервале применяемой абстракции отождествления отношение типа равенства сводимо к отношению логического тождества.

Это, конечно, не новый, а хорошо известный метод классической (теоретико-множественной) математики. Я придам ему только своё *интервальное* истолкование. Схема этого метода такова: в некотором данном универсуме посредством условия $A(x)$ фиксируют соответствующий этому условию класс абстракции и, соответственно, отношение типа равенства (эквивалентности) объектов этого класса, применяя интуитивный принцип абстракции. Это первый — *дедуктивный* — шаг доказательства. Затем выбирают какой-то определённый (конкретный) объект из этого класса (определённое зна-

чение переменной x , например a) и для него доказывают теорему $B(a)$. Это второй — *индуктивный* — шаг доказательства, поскольку оно проводится для единичной посылки³⁰⁷. Третий шаг доказательства состоит в устранении *постороннего характера* второго (индуктивного) шага путём использования следствий первого (дедуктивного) шага. Именно принцип абстракции (если в доказательстве $B(a)$ мы не выходим за его рамки) позволяет нам рассматривать конкретный объект a , для которого доказана теорема, как (произвольный, но фиксированный) *абстрактный объект*, как представителя всех возможных значений x *в контексте данного доказательства*. Итак, если K_a — класс абстракции по элементу a и доказано $B(a)$, то доказано, что $x \in K_a \supset B(x)$, и, обобщая по переменной x , имеем $\vdash \forall x (x \in K_a \supset B(x))$.

Здесь полезно отметить некоторые гносеологические особенности указанного метода обобщения. Релятивизируя доказательство теоремы $B(x)$ относительно класса абстракции, мы естественно ограничиваем её область истинности, но зато получаем возможность перейти от тривиального \exists -обобщения на основе единичного примера к нетривиальному \forall -обобщению на основе того же примера. Разумеется, если условие релятивизации отбросить, то заключение $B(a) \mid\text{---} \forall x B(x)$ будет неверным, поскольку x по условию доказательства нельзя рассматривать в интерпретации всеобщности.

В содержательных рассуждениях на зависимость того или иного обобщения от *интервала абстракции*, применяемой здесь, обычно не указывают и даже не обращают внимания. Отсюда видимость совпадения \forall -обобщения в чистой логике и \forall -обобщения в случае её приложений. Если бы предметную область теории можно было ограничить так, чтобы обеспечить условия для интерпретации всеобщности всех её переменных, она превратилась бы в чистую логику. Осуществилась бы «заветная мечта» логицизма. Но эту ситуацию можно рассматривать только как предельный случай прикладного варианта \forall -обобщения, когда все классы абстракции либо исчерпываются универсальным классом, либо речь идёт о доказательствах теорем отдельно в каждом из классов абстракции при тривиальном разбиении универсума. Но в одноэлементном универсуме нетривиальную теорию не построишь, поскольку, как я уже однажды выяснил, в одноэлементном мире тождество и различие сами неразличимы, и, следовательно, никакое знание в нём невозможно³⁰⁸.

Отсюда, надеюсь, ясно, каким образом согласованы между собой прикладное и чистое \forall -обобщения.

Между прочим, можно рассмотреть и другой вариант той же идеи, если воспользоваться аксиомной схемой $A(a) \supset \forall x (x = a \supset A(x))$, где отношение типа равенства сохраняет свойство A ³⁰⁹.

Правда, остаётся ещё вопрос, как осуществить абстракцию отождествления и сделать её настолько убедительной, чтобы снять возражения Э.Бета, который считает такое решение проблемы «кажущимся». В частности, он пишет: «решение, которое состоит в утверждении, что рассматриваемая особая фигура представляет собой *всякую* фигуру соответствующего класса, есть едва ли не нечто большее, чем *ignoratio elenchi*. Ведь с самого начала проблема касается не такой уж очевидной возможности, а именно того, что *все* фигуры представлены одной единственной из них»³¹⁰.

И в этом возражении на описанную выше процедуру (или метод) трудно не согласиться с Бетом. Однако я думаю, что во многих случаях мы всё же можем сделать необходимую нам абстракцию отождествления достаточно убедительной. Хотя ситуацию, выраженную в содержании теоремы, мы переводим в наглядный геометрический образ, доказательство мы, в сущности, проводим так, как будто перед нами не эмпирический объект, «личные» свойства которого не относятся к делу, а объект абстрактный — идеальный геометрический образ. Мы доказываем теорему на понятии «треугольник», пользуясь одним из его референциальных значений. Иначе говоря, в нашем доказательстве проблема общности переносится с экстенционального аспекта объекта доказательства на его интенциональный аспект. Это то, о чём говорил Кант: «математик может доказать свойства круга вообще, начертив фигуру палкой на песке, как бы она ни была неправильна, с таким же совершенством, как если бы самый искусный гравёр выгравировал её на меди»³¹¹. К сожалению, эту мысль Канта, заимствованную им у Платона, трудно примирить с другим его утверждением, что «все геометрические основоположения ... всегда выводятся из созерцания ..., а вовсе не из общих понятий»³¹², даже если принять во внимание априорный характер такого рода созерцаний.

Я не предлагаю здесь общих рецептов на применение принципа абстракции. Но об одной возможности оправдать приведённую выше аксиомную схему хочу сказать. Очевидно, что сохранность свойства, необходимого для применения абстракции отождествления, а следовательно, и для доказательства теоремы о сумме углов треугольника, будет вполне обеспечена, если фигурирующее в этой аксиомной схеме отношение типа равенства можно преобразовать в логическое тождество *всех* треугольников. В рамках евклидовой теории этого сделать нельзя — слишком жёсткими являются здесь условия для тождества. Но мы можем использовать для этой цели другую теорию — аффинную геометрию на евклидовой плоскости. Здесь все треуголь-

ники абсолютно неразличимы (логически тождественны) по любому свойству, так что класс абстракции (по свойству «быть треугольником») представляется как единичный класс, и любое обобщение вида $A(a) \mid \forall x A(x)$ становится попросту тривиальным. Доказав в *реальном мире* евклидовой теории для единичного случая утверждение о равенстве суммы углов треугольника двум прямым, естественно перенестись в *возможный мир* аффинной теории, в котором теорема о треугольниках позволяет любой иной треугольник совместить с тем, для которого (в реальном мире) уже доказано наше утверждение. Таким образом решается «скандальная» философская проблема — именно в возможном мире аффинной геометрии реализуется «химическая», по мнению Беркли, идея Локка об «общем треугольнике» и снимается возражение Бета, который ставит под сомнение самую возможность ситуации, когда «все фигуры представлены одной-единственной из них».

Правда, в этом случае мы «импортируем» методы аффинной геометрии (в которой вообще нет единиц масштаба и метрических понятий) для обоснования некоторых «правил поведения» по отношению методам доказательства теорем евклидовой геометрии. Но я не вижу оснований, чтобы подвергать сомнению такой подход.

ГЛАВА 7. АБСТРАКЦИЯ НЕРАЗЛИЧИМОСТИ

Отношения, познающиеся из опыта, всегда не вполне достоверны и совершенны, и однако же сравнению всегда есть за что уцепиться.

Мишель де Монтень, «Опыты»

Представление о неразличимостях, о которых преимущественно здесь пойдёт речь, основывается на известной и простой идее: они должны зависеть от информационной техники, с помощью которой приобретается и отображается знание о мире. К такой технике в первую очередь относятся, конечно, наши естественные средства познания — наши органы чувств.

Что же касается чистой логики и математики, то, относя их к информационным средствам познания, следует иметь в виду, что эти средства как бы второго порядка, они в сфере «чистого разума». Это своеобразная надстройка над опытом, с помощью которой не столько непосредственно отображается, сколько путём абстракции конструируется мир.

Оправданием такой особой информационной роли чистой логики и математики является хотя бы тот факт, что строгость этих дисциплин требует, чтобы погрешности (ошибки) в решении вопроса о неразличимости объектов, представленных, к примеру, в виде уравнений (логических форм числовых равенств) всегда были равны нулю. Приближенные равенства как предмет для изучения — дело прикладной математики (численного анализа), а это уже вопрос не только «чистой теории».

Если принять, что и чистой математике не чужда природа информационной неразличимости, то речь может идти лишь о природе идеального порядка — неразличимости как «истине разума», не столько полученной извне, сколько созданной изнутри с бесконечной точностью. А для этого необходим *идеальный наблюдатель*, логика решений которого не зависела бы от пороговых характеристик, неизбежных в случае эмпирических наблюдений.

Бесконечность логико-математической точности формально объясняется *абстракцией предельного перехода*:

$$\lim 1 / \Delta x, \text{ когда } \Delta x \rightarrow 0.$$

Здесь Δx — погрешность оценки значения x , а $1 / \Delta x$ — формула точности. Говоря иначе, неразличимость в смысле логики и математики предполагает, что Δx бесконечно мала. И если перевести это на логический язык, то равенство (тождество по идеальной неразличимости) можно выразить формулой

$$x = y \equiv \forall \varepsilon |x - y| < \varepsilon.$$

Это определение принял бы, по-видимому, и Лейбниц, который явно выделял идею сравнимости расстояний и поэтому яснее, чем кто-либо до него, видел скрытую в этой идее возможность определять тождество через его противоположность — через различие, или, по собственному выражению Лейбница, как последнее из неравенств: «равенство может рассматриваться как бесконечно малое неравенство, где различие оказывается менее всякой данной величины»³¹³.

С чисто теоретической точки зрения философия предельного перехода заключена в абстракции бесконечности. Но с точки зрения эмпирической она, конечно, в другом. Она — в идее *границы*. В приведённой выше формуле граница открыта. На практике она замкнута. Поэтому в случае эмпирического тождества квантор общности придётся опустить, а символ тождества связать пороговой точностью различений. На практике граница неразличимости мыслится, вообще говоря, как *интервал* (отрезок), в котором лежат (в который укладываются) почти все значения измеряемой переменной (члены последовательности результатов измерений). Поскольку речь идёт о бесконечном множестве значений (измерений) одной и той же величины, мы можем мыслить истинное значение этой величины как единственное значение, выражаемое определённым числом (с теоретической точки зрения — пределом последовательности). Но поскольку мы не можем обойтись без реального наблюдателя, который производит измерения, мы должны учесть, что он занят различением (оценкой) значений с присущим ему *порогом различения* (порогом чувствительности), который выражается некоторым сравнительно малым (хотя, вообще говоря, произвольным) положительным числом ε . Очевидно, что наш наблюдатель будет различать между собой все значения переменной, абсолютная величина разности между которыми превышает значение ε . Но значения переменной, которые разнятся меньше, чем на ε , для наблюдателя будут неразличимы, хотя их будет (теоретически) бесконечно много.

Конечно, чем меньше ε , тем точнее работа наблюдателя. Она была бы абсолютно (теоретически) точной, если ε можно было бы взять равным нулю. Однако практически (с эмпирической точки зрения) это невозможно. Поэтому даже идеальный наблюдатель (при условии, что $\varepsilon \neq 0$) всегда будет следовать указанию Платона: если есть два, но мы не знаем об этом, то для нас есть только одно.

Таким образом, утверждение, что предельная точка существует (к примеру, в виде истинного значения величины) и притом только одна, будет иметь гносеологически различные образы в зависимости от ситуации, в которой делается это утверждение. Для наблюдателя истинность этого утверждения (о существовании и единственности) будет относительной, ограниченной существованием *интервала неразличимости* (в принципе бесконечного) множества ненаблюдаемых. Для математика, доказывающего соответствующую теорему, она будет абсолютной, выраженной в точном математическом смысле понятия предела.

Следовательно, с неразличимостью как истиной разума мы встречаемся только в теории, в частности в классической теории континуума, в топологии, в теории моделей. Неразличимость не имеет здесь ни психологической, ни эмпирической нагрузки. Мера близости здесь полагается бесконечно большой. Поэтому, к примеру, в одном понятии неразличимости точек пространства объединяются и условие их индивидуации, и условие их тождества. И возможно, это как раз тот случай, который имел в виду Лейбниц, выдвигая свой принцип тождества неразличимых. Однако по отношению к явлениям чувственного опыта уже Кант требовал эмпирического, а не «чистого» употребления понятий. А в этом случае невозможно обойти молчанием понятие наблюдаемой неразличимости.

7.1. О тождестве неразличимых

Этот раздел параграфа полезно начать с короткого, но выразительного анонимного диалога:

«А. Принцип тождества неразличимых мне кажется совершенно ясным. Я не вижу, как можно было бы определить тождество или установить связь между математикой и логикой, если не использовать этот принцип.

В. Напротив, мне он кажется абсолютно ложным. И ваше беспокойство как математического логика здесь ни при чём. Если принцип ложен, мы не имеем права им пользоваться»³¹⁴.

Выражение «тождество неразличимых», доставшееся нам от Лейбница, почти два столетия воспринималось как метафизический, а не логический постулат. Оно вошло в философский обиход как имя идеи не слишком-то определенной или, пожалуй, настолько неопределенной, что весь последующий опыт и соответствующие этому опыту научное знание и логика, даже развиваясь, не вступили в противоречие с этой идеей. Напротив, они всеми силами старались её утвердить — каждый, разумеется, на свой манер. И здравый смысл тоже охотно пользовался любыми намеками на эту идею, применяя выражение «тождество неразличимых», так сказать *ça dépend*, извлекая по-своему выгоду из неоднозначности или размытости его смысла.

Правда, на первый взгляд однозначность понимания все же была. Она проявлялась в законах логики тождества, восходящих отчасти к тому же Лейбницу. Но если верно, что по смыслу этого принципа «понятие тождества сводится к понятию неразличимости»³¹⁵, то всё же остаётся вопрос, как толковать неразличимость, входящую в содержание этого принципа.

Согласно Лейбницу, как замечено выше, тождество и неразличимость не «живут» обособленно. Диалектика их единства составляет, по выражению того же Лейбница, один из великих принципов метафизики. И всё же, уточняя смысл выражения «тождество неразличимых», мы можем сделать логический акцент либо на понятии «тождество», либо на понятии «неразличимость». В семантике естественного языка эти понятия, как известно, не совпадают. Но в языке научном они часто используются как синонимы. Правда, акцент на понятии «тождество», даже в научном языке, обязывает нас, по-видимому, к большей строгости; он ближе к рациональным установкам познания, чем акцент на слове «неразличимость», который, напротив, интуитивно ближе к познанию эмпирическому, связанному с данными наблюдений. Быть может, именно в силу этой двойственности потребность в эвристическом обсуждении этих понятий «во всей их полноте» не ослабевает, несмотря на уже известные аксиоматические их формулировки. При этом очевидно, что речь здесь идет о начальных истинах познания, а «трудность понятий увеличивается по мере их приближения к начальным истинам»³¹⁶.

Готлоб Фреге в статье «Sinn und Bedeutung» отмечает, что с понятием тождества связан ряд вопросов, ответить на которые совсем не просто. На некоторые из этих вопросов Фреге все же дает ответы. Как известно, эти его ответы стали классическими и настолько об-

щепринятыми среди логиков, что редакторы русского перевода названной статьи сочли возможным сопроводить её словами: «Статья датирована 1892 г.; кажется, что она написана вчера»³¹⁷.

Однако в философской повести о тождестве неразличимых мне всегда виделась иная интрига, чем та, что привела к концепции Фреге. Его ответы, вполне корректные и убедительные, но сводящие тождество внеязыковых реалий к чистой тавтологии, не могут в полной мере удовлетворить тот исследовательский интерес, который и в прошлом и в настоящем вызывает проблема тождества неразличимых.

Фреге выбирает только одну составляющую пары — тождество — и для неё находит решение. Семиотический аспект, которым он при этом сознательно ограничивается, разрешение проблемы тождества усматривает, по существу, в понятии синонимии. Для него отношением тождества неразличимых связаны только знаки: отношение тождества имеет место всякий раз, когда в данной интерпретации языка одно из отождествляемых (и вообще говоря, различных) имён имеет тот же смысл (концепт), что и другое. При этом выражения «та же вещь», «один и тот же смысл» и пр., являясь частью семантического анализа отношения тождества, как бы выносятся за скобки и сами дальнейшему анализу не подлежат. И это вовсе не голословное утверждение, поскольку, как правило, соглашаются с тем, что употребление «слов “тот же самый” или “тождественный с” принадлежит наиболее важной части нашей способности рассуждать и не может быть объяснено при помощи более простых понятий»³¹⁸. В лучшем случае за разъяснением этих слов нас отсылают к некоторой действительности (модели), которая, какова бы она ни была, лежит уже за пределами рассматриваемого языка и логики.

Концепция Фреге была продиктована нуждами его *Begriffsschrift*, и в этом смысле она избегает упрека. Но очевидно, что для теории тождества, претендующей на решения *en bloc*, семиотическим аспектом не может исчерпываться проблема. Когда Локк говорил о «неразлично сходных», когда Лейбниц и Кларк в своей переписке полемизировали о тождестве неразличимых, они, конечно, имели в виду не случайные совпадения в значениях слов и знаков, а необходимые и достаточные основания для суждений о тождестве применительно к объектам всей объективной реальности. В объяснении тождества неразличимых реалий, а не тождества терминов видели они подлинный *casus delicti*. Напротив, для Фреге онтология тождества тривиальна: когда говорят о тождестве вне знаковой функции слов, надо подразумевать отношение, «которое возможно только между вещью и ею же самой»³¹⁹.

Ясно, что при таком разъяснении вопрос о том, как внеязыковые ситуации отражаются в известных логических определениях (формулах) тождества и возможно ли вообще обоснованное употребление этих определений за пределами чисто языковых реалий, разрешается тривиально. Логика указывает нам предельный случай трактовки выражения «тождество неразличимых» — это самоидентичность. Но при этом она не может нам объяснить видимую избыточность этого выражения, его «зачем-то» раздвоенность на «тождество» и «неразличимость», что явно подрывает претензию логики на замкнутость образа и однозначность (и общность) предлагаемого ею решения. Обоснованно рассчитывать на равносильность понятий указанной пары естественно лишь тогда, когда мы сами порождаем эту равносильность посредством подходящих соглашений.

Я не утверждаю, что на пути, по которому пошла логика после Фреге, неразличимость была полностью поглощена тождеством, хотя, как я уже заметил выше, удовлетворительной логической теории неразличимости эмпиризм не создал. Но когда вопрос о неразличимости (а не только о тождестве) стал актуальным для логики, неразличимость всё же пришлось определять независимо от тождества, невольно ослабляя трансцендентный смысл первоначальной идеи. Принцип тождества неразличимых потерял при этом абсолютный характер. Однако он по-прежнему остался «чистым понятием», выходящим за рамки возможностей эмпирического опыта в той мере, в какой входят за рамки этого опыта все идеальные понятия (идеализации) формального логического языка. И тем не менее, стало ясно, что заключать от тождества к неразличимости или от неразличимости к тождеству — это, вообще говоря, совсем не одно и то же, поскольку в этом случае уже нельзя игнорировать конкретные процедуры, условия или способы различений и зависимость результатов различений от явно или неявно принимаемых при этом абстракций.

С формальной точки зрения тождество (неразличимых) является логической постоянной. Роль этой постоянной и её смысл (даже при различных подходах к её определению) теоретически инвариантны независимо от того, какой при этом подразумевается опыт. В этом, естественно, проявляется априоризм логической трактовки понятий. Но с содержательной точки зрения тождество (неразличимых) в основе своей эмпирично по крайней мере в том смысле, что оно «относится исключительно к *возможностям различения*»³²⁰ (курсив мой — *М.Н.*). Чем именно обусловлена эта возможность различения, в принципе очень существенно, если иметь в виду гносеологию вопроса. Всегда важно уточнять, соответствует ли она собственно

эмпирическим условиям распознавания (узнавания) или тем, что допускаются только теоретически, например согласно теоретико-множественной концепции индивидуальных областей (универсумов рассуждений).

Отношение тождества (неразличимых) в его формальном аспекте можно уподобить универсальным физическим постоянным, которые, как известно, не зависят от системы отсчета, где измеряются их значения. Напротив, отношение тождества (неразличимых) в его содержательном аспекте, отнесенное к возможностям различения, уже не является универсальной постоянной — это ковариантная величина, относительная к определенной «системе отсчета».

Очевидно, что только содержательный аспект позволяет включить эмпирическую неразличимость в объём понятия о тождестве неразличимых. С формальной точки зрения мы не можем принять редукцию тождества к эмпирической неразличимости, не впадая в противоречие или не ослабляя логический смысл понятия. Именно формальная точка зрения не позволяет поставить понятие тождества в зависимость от того или иного порога различения индивидов, поскольку имеется в виду универсальная приложимость этого понятия. Таким образом, проблемная ситуация здесь налицо: чтобы понятие тождества получило нетривиальный смысл в приложениях, его формальный аспект должен иметь опору в содержательном; между тем именно в этом последнем аспекте, основанном на возможностях различения, отношение тождества не может выражаться иначе, как неразличимостью, несовместимой с формальным аспектом.

Традиционный подход к преодолению этой трудности состоит в том, чтобы рассматривать тождество как теоретическую идеализацию реальных отношений. Он вводит тождество как предел, к которому стремится переменная неразличимость. И хотя на практике такое тождество недостижимо, теоретически всё же полагают, что предельный переход завершен. Таким образом, в теорию тождество вводится как достижимая абстрактная реалья, отличная от любого из тех ее эрзац-представлений, которые мы получаем методом последовательных приближений. Но по завершении перехода к пределу кажется вполне естественным истолковать тождество в его формальном (логическом) аспекте, по принципу Лейбница, как единственную абсолютную («последнюю») неразличимость, а все её конечные приближения — как неразличимости относительные, обусловленные особенностями средств различения.

Существенным теоретическим следствием указанного традиционного подхода является такая топология на универсуме, при которой структура универсума отделена (независима) от «внешней» для

нее практики измерений. Поэтому традиционная концепция строится не на интервальных, а на точечных образах. Она опирается, с одной стороны, на представление об универсуме как точечном множестве, а с другой — на далеко идущую гипотезу о возможности (трансцендентной) индивидуации всех элементов этого множества.

Использование столь сильной абстракции индивидуации полностью согласуется с классической логикой рассуждений. Вместе с тем оно отвечает и существу дела, поскольку индивидуация большинства абстрактных объектов, вводимых в контексте теоретико-множественных идей, невозможна без использования трансцендентных понятий.

Однако с точки зрения чисто гносеологической решение вопроса об индивидуации зависит от возможностей эффективной характеристики индивидуального, ведь то, что в онтологическом смысле существует как «в-себе-бытие», не обязательно существует и для познания. В частности, в классическом континууме, который мыслится как завершённое точечное множество, каждая его точка имеет «в-себе-бытие», но эффективное (числовое) представление имеет не каждая. Те, что не имеют индивидуализирующих описаний (а их большинство), как объекты познания не определены однозначно, их существование подразумевается, так сказать, *absolute spectatis* и соответствует трансцендентной абстракции индивидуации в её онтологическом смысле. Но для эмпирической логики понятен и оправдан интерес к такой концепции тождества и индивидуации, которая зависит от возможностей эффективной характеристики индивидуального, ведь то, что в онтологическом аспекте допускается как «в-себе-бытие», не обязательно имеет смысл в аспекте эмпирическом.

Вот почему нас нередко беспокоит вопрос об объективности наших понятий: существует ли их содержание именно так, само по себе, или только как функция описания. С этой гносеологической позиции интересна именно такая интерпретация принципа тождества неразличимых, которая была бы адекватна феноменологическому фрагменту общей научной картины универсума, отражаясь, в частности, в *логике наблюдаемых*. В рамках такой логики у нас нет оснований приписывать трансцендентный смысл принципу тождества неразличимых. Даже абстракция отождествления выглядит в этом случае слишком сильной, слишком теоретической абстракцией. При условии, что мы интерпретируем наблюдаемые как сенсорные стимулы, нам остается только одна абстракция, релевантная представлению о тождестве неразличимых в пространстве опыта, — это *абстракция неразличимости*.

7.2. Абстракция неразличимости

Эта абстракция была сформулирована и принята в рамках интервального подхода для уточнения гносеологических ситуаций, в которых ответ на вопрос о содержании принципа тождества неразличимых даётся с учётом информационных возможностей познания, в частности, с учётом актов восприятия (разрешающей способности) наблюдателя или какой-либо другой информационной системы. В определённом смысле абстракция неразличимости – это преобразование и обобщение лейбницевской метафизической идеи на эмпирические условия познания, чем и оправдывается введение специального термина «абстракция неразличимости». Я ввёл этот термин в 1976 г., хотя неявно сама абстракция подразумевалась уже в моей более ранней статье³²¹.

В отличие от концепции Фреге, в случае абстракции неразличимости понятие тождества ставится в ряд производных понятий, а за исходное принимается понятие неразличимости, в котором (в отличие от понятия тождества в его собственно логическом смысле) необходимо отражаются свойства познающей структуры, характеризующие её способность к раздельному отображению образов внешней среды. Очевидно, что любая такая неразличимость есть неразличимость «с точки зрения», совпадающей с точкой зрения соответствующей познающей структуры. При этом в отсутствии априорной информации об универсуме (предметной области) эмпирически реальный процесс отождествлений и различений реальных объектов опыта (в пространстве и во времени) детерминирован конечной информацией о наблюдаемых состояниях этих объектов. Естественно, что тождество по неразличимости в этом случае может изменяться от аспекта к аспекту (соответственно точке зрения), то есть является, как я уже отмечал, по существу *ковариантной*, а не *инвариантной* величиной, что избавляет понятие «тождество неразличимых» от обычного упрёка в тавтологичности.

Ясно, что для неразличимостей как «истин факта» условия наблюдения (измерения) должны входить существенной составной частью в их определение. В соответствии с этим абстракция неразличимости отвечает на вопрос о том, как строится универсум в индивидуальном «сознании» наблюдателя (или какой-либо информационной системы), когда нельзя пренебречь субъективной особенностью процесса (акта) распознавания, то есть когда должны быть приняты во внимание «внутренние» представления об универсуме, индуцированные конечной информацией о неразличимости образов в сен-

сорном пространстве наблюдателя. К примеру, человеческий глаз воспринимает и различает только конечное число градаций яркости, не замечая тех объективно различных градаций, которые заключены в пространстве меньшем, чем пространственный порог разрешения для глаза³²². Ситуация такого рода является основной гносеологической ситуацией в любых познавательных актах, где речь идёт об измеримых признаках объектов.

Как следствие (вне всяких абстракций потенциальной или актуальной бесконечности), абстракция эмпирической неразличимости предполагает заведомую неопределённость («энтропию опыта») в суждениях о том, какая истина выражается (отражается) фактом этой неразличимости. Это остаётся так и в том случае, когда точность наблюдения берётся как переменная (монотонно убывающая) величина, поскольку в своём изменении она не может стать исчезающе малой (бесконечно малой), хотя бы потому, что значительное увеличение точности исключает возможность «чистых» (невозможных) наблюдений и в конечном счёте приводит к квантовым эффектам.

Стало быть, и здесь понятие об интервале абстракции будет необходимо, чтобы избежать «кажущихся тождеств» в ситуациях эмпирических отождествлений и тем самым исключить возможность противоречий, связанных с относительностью отождествлений. Это интервальный путь решения вопроса. На другом, но тоже абстрактном, пути Лейбниц онтологию наблюдаемых заменяет онтологией абстрактных объектов (мысленных сущностей) и таким образом разрешает «запутанный вопрос» о структуре континуума³²³.

Именно эта лейбницевская идея оказалась отправной для логики. Правда, логика отчасти ослабила трансцендентный смысл этой идеи, придав ей квазиноминалистический (конструктивный) вид тождества неразличимых по признакам, выразимым в соответствующем формальном языке описания. Но этого, по существу, достаточно, чтобы полностью вывести проблему за рамки эмпирического опыта, поставив неразличимость в связь с содержанием тех допущений, из которых исходят при построении абстрактных (идеальных) объектов теории и её формального языка.

Этим, конечно, не исключается общая идея относительности тождества неразличимых: объекты, неразличимые по признакам, формализуемым в одном языке, в принципе могут быть различимы в другом. Но в интервале абстракций теории это позволяет толковать неразличимость как эквивалентность (или конгруэнтность), извлекая из такого толкования все выгоды абстрактных рассмотре-

ний, связанных с отношениями типа равенства. И так поступают не только в логике или математике, но и в науках о природе, в частности в квантовой физике, где принцип тождественности неразличимых частиц имеет такой же постулативный характер, как и в логике. При этом в мире объектов сравнения подразумевается тривиальная бинарная метрика: неразличимые объекты здесь бесконечно близки друг другу, а различные бесконечно далеки друг от друга. Неразличимых, но относительно близких объектов, близких в большей или меньшей степени, для этой абстракции неразличимости нет. Таким образом, топология мира, как она выглядит *изнутри* языка классической логики, — это топология жестких границ. Такая дискретная топология естественно индуцируется бинарной метрикой и вполне соответствует дискретному характеру языка описания³²⁴.

Между тем при более тонких и более точных сравнениях жесткие границы, создаваемые языковой и логической абстракцией, нередко «расплываются» в континуум промежуточных ступеней. Эту нередкую для познания непрерывность в переходах значений реальных признаков «улавливают» тем, что на множестве значений признаков вводят метрику вещественных чисел, а условия неразличимости задают какой-либо функцией расстояния, согласованной с этой метрикой.

Характерным примером такой функции является евклидово расстояние между объектами x и y в n -мерном метрическом пространстве признаков, где каждый объект представлен не «сам по себе», а некоторым вектором его измеримых признаков. Абстракция неразличимости возникает при этом всегда, когда совокупная близость соответственных признаков достигает определённой критической области, постулируемой или зависящей, скажем, от погрешности измерения, пороговой величины восприятия, разрешающей способности прибора и пр. Ведь и в случае приборных измерений неразличимость близких, но объективно разных значений никогда не исчезает совсем, а может лишь уменьшаться с совершенствованием измерительной техники. Теоретический предел для такого совершенствования, указанный соотношением неопределенностей, на практике выглядит как почти недостижимая точность.

Для интервальной точки зрения этот факт гносеологически весьма существен. Он говорит нам не только о неточности эмпирического опыта, но, возможно, и о «всепроникающей неточности реального мира»³²⁵. Кроме того, он предупреждает о том, что, принимая в расчёт технику реальных наблюдений, необходимо позаботиться о логическом анализе отношений неразличимости, свойственных эм-

пирическому опыту, поскольку эти отношения составляют основу наших практических заключений о положении дел в мире, и уже поэтому они могут быть интересны для логики, в особенности там, где логика становится прикладной или обнаруживает свою связь с теорией познания.

В частности, для логики существенна возможность определять неразличимости через функции расстояний, что согласуется с практикой приближенных методов вычислений и измерений, когда неразличимость истинного и приближенного значений задаётся *интервалом неопределенности*. Можно сказать, что все значения из этого интервала являются ϵ -копиями друг друга. А это означает, что такой интервал можно рассматривать как адекватное выражение идеи *тождества ϵ -неразличимых*, одновременно связывая с этим понятие о соответствующей *абстракции ϵ -неразличимости*.

Правда, классическая логика игнорирует процедуры отождествлений, которые основаны на абстракции ϵ -неразличимости. Точнее, она ограничивается только тем ее частным случаем, когда $\epsilon = 0$. Вот почему в логике отношение тождества (равенства) считают, как правило, не производным в актах познания, а изначальным отношением на универсуме возможной модели теории, выражающим, так сказать, онтологическую индивидуацию его элементов. При этом наша субъективная способность к различению элементов в универсуме, — как чисто гносеологический факт, — для логики значения не имеет.

7.3. Абстракция неразличимости и метрическое равенство

Информация о величинах — измеримых свойствах реальных объектов в науках о природе играет первостепенную роль. При этом акт измерения сочетает и чувственный и рациональный аспекты познания, поскольку он основан, во-первых, на нашей естественной способности сравнивать наблюдаемые объекты (их признаки) и различать или же не различать их и, во-вторых, на теоретико-числовых понятиях, необходимых для оценки измеряемых величин. Как это отметил ещё Кассирер, «самое простое измерение опирается на известные теоретические предпосылки, на определённые “принципы”, “гипотезы”, “аксиомы”, которые вовсе не берутся из мира ощущений, но привносятся в него в качестве постулатов мышления»³²⁶.

Наша субъективная способность к наглядному сравнению законами Вебера — Фехнера поставлена в определённую гносеологическую связь с объективными различиями сравниваемых объектов: она обладает конечной разрешающей возможностью и пропорциональ-

на логарифму интенсивности раздражителей зрительных органов чувств. Что же касается приборов (с помощью которых мы стремимся усилить эту нашу способность), то для их возможностей сравнения и различения или неразличения объектов выявлен некий «онтологический минимум», обусловленный квантовыми свойствами материи. И в одном и в другом случае содержание информации, сообщаемой при отображении измеряемой величины, зависит от пороговых характеристик (разрешающей способности) следящей системы, от необходимо конечной (а не бесконечной) точности измерения.

Идея измерения с помощью шкал, которыми наделяют измерительные устройства, технически проста. Но в ее основе лежит теория, то есть ряд неочевидных предпосылок.

Согласно теории, приборную шкалу определяют как гомоморфизм системы возможных значений величины в систему символов отсчета. Это означает, что разнообразие множества возможных значений величины предполагается, по крайней мере, не меньшим, чем разнообразие множества значений отсчета или множества отметок шкалы. Такое предположение оправдывается практикой измерений. Собственно, оно индуцировано этой практикой. На деле, однако, идут значительно дальше, предполагая множество возможных значений величины непрерывным (континуумом) в интервале неопределённости. Это предположение обусловлено уже не практикой, а только теорией, объекты которой — идеальные прямые, идеальные окружности, идеальное движение и пр. С точки зрения естествоиспытателя или инженера наиболее плодотворной в этих идеализациях является как раз обобщение практики — возможность аналитического или геометрического подхода к исследованию и описанию взаимных связей явлений, реализуемая заменой приближённых представлений, полученных путем наблюдения, на точные математические абстракции. Поэтому реальная шкала прибора мыслится как упрощенный образ идеальной (теоретической) измерительной шкалы.

На практике количественные характеристики величин получают измерением по упрощенным реальным шкала — методом, который сопряжен с инструментальной погрешностью и с некоторыми другими ошибками измерения. Хотя эти ошибки можно, вообще говоря, уменьшать математической обработкой результатов измерений, тем не менее, сам метод всегда остается в границах точности измерительной техники, пусть даже и очень большой. Инструментальную погрешность обычно называют предельной, поскольку модуль разности между истинным и любым приближенным значением величины, получаемым при измерении данным прибором, не пре-

восходит этой погрешности. Значит, вместе с выбором техники измерения (или обработки) дается и априорная граница его точности, а косвенно — и граница точности метода измерения (или обработки), основанного на этой технике.

Понятие об измерении с погрешностью, о приближенном значении величины имеет смысл лишь в связи с понятием об истинном её значении, а вопрос о соотношении этих понятий — во многих аспектах философский вопрос.

Приближенное значение величины — это её гносеологическая неоднозначная числовая характеристика по данным измерений или по данным вычислений. Истинное значение, напротив, — объективное количество величины, её онтологическая числовая характеристика, присущая величине самой по себе, независимо от каких-либо измерений. Истинное значение, как полагают, единственно. Оно выражается только одним числом — рациональным, иррациональным или комплексным. При этом обычно отмечают, что истинные значения эмпирических величин, как правило, нам неизвестны. Имея всегда лишь некоторое конечное их приближение, мы можем оценить границу допущенной абсолютной погрешности, хотя, строго говоря, сама эта погрешность остается для нас столь же неизвестной, как и истинные значения эмпирических величин.

Говоря о возможном совпадении приближенного и истинного значений, имеют в виду их арифметическое равенство. Но обычная инженерная практика замены истинного значения приближенным основывается, конечно, не на этом равенстве. Самый факт погрешности, отличной от нуля, не может препятствовать отождествлению (взаимозаменимости, подстановочности) истинного и приближенного значений, поскольку внутри интервала неопределенности информация о том, какое значение истинно, а какое приближенно, является посторонней. Это и позволяет абстрагироваться от информации такого рода, рассматривая просто пары $\langle a, b \rangle$, наделенные точностью ε .

Следовательно, — в качестве условия на отождествление — интервал неопределенности выражает *меру неразличимости* допустимых значений величины. Поэтому его естественно понимать как *интервал ε -неразличимости* и, опираясь на идею замены равного равным, столь же естественно ввести понятие о *метрическом равенстве* следующим определением:

$$a R_{\varepsilon} b \leftrightarrow |a - b| \leq \varepsilon,$$

где a и b — числовые объекты, или же определением:

$$a R_{\varepsilon} b \leftrightarrow |f(a) - f(b)| \leq \varepsilon,$$

где a и b — это уже любые объекты, в частности приближенные формулы, свойства которых допускают числовую оценку $f(x)$.

Оба определения оправданы, по крайней мере в том смысле, в каком тождество неразличимых определяется ими как метрическое равенство.

Метрическое равенство сохраняет не все свойства арифметического. Зато оно богаче арифметического числом реализаций: решениями $|a - b| \leq \varepsilon$ служат все элементы множества конечных разностей, не превосходящих ε по абсолютной величине. При $\varepsilon = 0$ метрическое равенство переходит в арифметическое. Иначе говоря, эти определения являются естественным обобщением этого частного случая.

Известно, что неразличимость можно получить, объединяя эквивалентности. Так сказать, это логика их генетической связи. Но гносеология этой связи иная. Тождество неразличимых гносеологически исходно. Эквивалентность же возникает как вторичная абстракция за счет условия транзитивности. Это условие либо постулируется, так что вопрос «пренебрежения различиями» считается априори решенным, либо оправдывается практически, как в случае измерений, когда внутри ε -интервалов индуцируется своя абстракция отождествления и, соответственно, эквивалентность, вполне оправданная практикой инженерных решений.

Тем не менее, суть дела такова, что одно лишь тождество неразличимых здесь *ens a se*, хотя внутри ε -интервалов оно и сужает свой смысл до смысла эквивалентности. Но эквивалентности, правда, уже относительной, *ens ab alio*, связанной с нашим «полем зрения» на универсум, когда это поле зрения ограничивается каким-либо произвольным (но одним-единственным!) ε -интервалом. Так сказать, субъективно (гносеологически) тождество неразличимых **становится** эквивалентностью внутри каждого такого интервала, но объективно (онтологически) оно всегда **остается** только метрическим равенством, в чем мы убеждаемся всякий раз, когда повышается порог различения, увеличивается точность наших приборов. Это своего рода **парадокс неразличимости**, причем парадокс неустрашимый.

Арифметическому равенству, как известно, сопутствует абстракция отождествления. Но метрическому равенству эта абстракция, вообще говоря, уже не сопутствует: классы решений, указанных выше метрических равенств, не образуют фактор-множества по ε -неразличимости. Поэтому для задач на «различимость» я и принимаю другой термин и другую абстракцию — **абстракцию неразличимости**. Эта абстракция может быть произвольной осознанной, например, когда в определённом ε -интервале нормированной точности допус-

каются отклонения размеров изделия от проектных, номинальных. Но эта же абстракция может быть и произвольной, неосознанной, например когда мы просто не можем обнаружить различий, лежащих за порогом доступной нам способности различения. И дело тут не в психологической установке на отождествление различных, как иногда говорят, а в «эмпирической принудительности» такого отождествления.

В реальных актах сравнения ϵ всегда больше нуля, что, конечно, влияет на наши представления об универсуме в той мере, в какой эти представления создаются на основе «приборной информации». Так мы естественно приходим к заключению, что акт измерения, равно как и всякий чувственный (в том числе технический и промышленный) опыт, основан на абстракции неразличимости.

Очевидно, что абстракция неразличимости, являясь относительной к средствам наблюдения, предполагает возможную неопределенность в суждениях о том, что скрывается за данными наблюдений, как я уже говорил, энтропию опыта. В частности, если « π_n является аппроксимацией числа π его первыми n десятичными знаками, то разность $\pi_n - \pi_m$ для достаточно больших значений n и m становится меньше точности любого возможного измерения, если даже допустить, что эта точность может быть неограниченно улучшена с течением времени»³²⁷. Вообще всегда в практике измерений безответным остается «вопрос о том, что происходит в точках x и $x+dx$, если измерения в этих двух точках, отстоящих друг от друга на расстоянии dx , выполнить невозможно»³²⁸. Без прочих доводов, *ipso facto*, мы отождествляем эти две точки, как и все другие, лежащие между ними, по их абсолютной для нас неразличимости, а не по какому-либо выделенным дескриптивным признакам, как в случае абстракции отождествления. В этом, очевидно, еще одно, собственно гносеологическое, основание для явного введения абстракции неразличимости в тезаурус общенаучных понятий.

7.4. Абстракция неразличимости и гносеологическая точность

Справку о понятии «гносеологическая точность» вы не найдёте ни в отечественных, ни в зарубежных словарях и энциклопедиях. Это понятие интервальной методологии. Термин «гносеологическая точность» впервые употребил Ф.В.Лазарев в связи с критикой методологических основ классического естествознания³²⁹. Ему же принадлежат и первые наброски к интервальному портрету гносеологической точности. Однако ниже я предлагаю свою версию этого по-

нятия, известную по моим более ранним статьям и связанную с тем пониманием интервала абстракции, которое было изложено в предыдущих разделах этой книги³³⁰.

Естественнонаучную теорию принято называть точной, если имеется способ представления свойств объектов, изучаемых в этой теории, на языке численных измерений. Однако суть не столько в этом, сколько в возможности применения численных методов для оценки исходных параметров теории, так сказать, в возможности оценить *надежность теории*, указав границы погрешностей, разрешенных в ее собственной эмпирической основе. Собственно, и математику относят к точным (в этом смысле) наукам не потому, что она оперирует с числами, а потому, что погрешности «измерений» в ней равны нулю.

В отличие от математики, естественнонаучная теория не обладает такой бесконечной точностью. А если иметь в виду вопрос об экстраполируемости (развитии) теорий, то в общем случае заранее нельзя предусмотреть и того, насколько естественнонаучной теории можно доверять, какой у нее «запас прочности». Между тем, создавая теорию, мы, конечно, хотим от неё адекватного отображения экспериментально выявленных свойств оригинала. Таково одно из необходимых условий устойчивости научного (теоретического) знания, его преемственности и его развития.

Но можно ли поручиться за истинность результатов, если в их основе лежит всегда приближённый опыт? Ведь опыт, как принято считать, — это источник и «пробный камень» всех наших знаний. И если естествоиспытатель или методолог убеждены, что они исходят только из данных опыта, то их реакция на возможность «сохранения истинных результатов» этого опыта будет, конечно, однозначной. К примеру, такой: «*Всякие физические законы выражают известное* (курсив мой — *М.Н.*) приближение к истине: абсолютных законов пока нет, и мы не знаем, существуют ли они»³³¹.

В этом утверждении для меня неясно не только значение слова, выделенного курсивом, но и вся последующая часть фразы, связанная с понятием «абсолютного закона», зависящая от значения этого слова, ведь если нам неизвестен предел, то из каких источников мы черпаем «известное приближение». Однако я обойду возникающий здесь вопрос, просто заметив, что ни одна теория не является *только* индуктивным результатом опыта (включая и эксперимент). В противном случае мы не имели бы достаточных оснований для практического применения теории, когда ей приходится, по образному вы

ражению английского космолога Бонди, «вытягивать шею», то есть когда теория проверяется (применяется) в точках далеко идущей её экстраполяции.

Тем не менее, мы знаем, что в приговоре эмпирической проверки теории всегда содержится неустрашимый элемент неопределённости, — говоря «да», опыт не исключает более позднего «нет» (при других условиях проверки). Это естественно наводит на мысль, что, в сущности, любая естественнонаучная теория оправдывается только «за недостатком улик», хотя рано или поздно улики против теории найдутся, и даст их всё тот же опыт. Иначе говоря, опыт свидетельствует и «за» и «против» теории. Это кажущееся противоречие редко обращает на себя внимание методологов науки. Между тем понятие о гносеологической точности было введено как раз для того, чтобы понять действительный смысл этого противоречия и разрешить его.

Интервальный подход исходит из предпосылки, что *в вопросах обоснования знания проблема «теория и опыт» сводится к проблеме «абстракция и опыт»*. Эмпирический «остаток» естественнонаучной теории (за вычетом её абстракций) можно не принимать во внимание — он очевидно согласуется с опытом. Основной вопрос состоит в согласовании «трансфеноменального» (или «умопостигаемого») смысла теоретических абстракций с их техническим и вообще опытным применением. Теоретические абстракции суть отражения «чего-то», и вопросы «что?» и «каким образом?» они отражают, выдвигаются, таким образом, на первый план.

Развитие естествознания в начале 20-го века приоткрыло новую перспективу для понимания этой проблемы, добавив к параметру качественной подтверждаемости теории (главным с точки зрения классического «символа веры») в качестве существенного параметра количественный — метрическую точность её эмпирической основы. И поскольку последний параметр для всех известных теорий варьировал в весьма широких пределах, проблема согласования обоих параметров стала вполне актуальной. Естественно поэтому уточнить интервальную точку зрения на эту проблему.

Согласно гипотезе о гносеологической точности, каждой абстракции, включающей количественные параметры, значения которых в конечном счете определяются измерением, помимо интервала приближения можно сопоставить ещё другой интервал, тоже связанный с допуском точности измерений, но относящийся не к средствам измерения, а *к условиям формулировки* (порождения или принятия) самой абстракции по данным измерений. По существу, это гипо-

теза о значениях точности, достаточных для формулировки абстракции, физическая суть которой верифицируется каждым конкретным выбором значения из этого интервала. В этом случае одна из его границ выражает наименьшую точность (наибольшую ϵ -неразличимость), при которой вообще возможно сформулировать (или выбрать) эту абстракцию как математическую или физическую теорию данного опыта, как подходящее (приемлемое) его описание, в результате чего и возникает убеждение в её истинности. Другая граница интервала, в свою очередь, выражает наибольшую точность (наименьшую ϵ -неразличимость), при которой уже принятая однажды абстракция (теория) ещё не расходится с (другим, уточняющим её) экспериментом или не противоречит новым данным опыта. В результате мы можем сказать, что каждому значению ϵ из интервала неразличимости соответствует ϵ -*модель* абстракции, аппроксимирующая эту абстракцию (теорию) с точностью до ϵ , а класс всех её ϵ -моделей образует *структуру*, все элементы которой удовлетворяют условию тождества по неразличимости. При этом важно подчеркнуть, что, в отличие от метрической точности, *гносеологическая точность — это внутреннее свойство абстракции (теории)*, лишь генетически связанное с фактами единичных измерений.

Конечно, вопрос о границах интервала гносеологической точности абстракции в каждом конкретном случае — вопрос особый. Но парадокс в том, что различимость (точность опыта) не должна быть слишком тонкой для получения хорошей абстракции — хорошей на данном этапе формирования теории. «Если бы Галилей имел возможность выполнять наблюдения так же точно, как в последующие столетия, запутанная смесь различных явлений сделала бы открытие законов гораздо более сложным. Может быть, Кеплер никогда не объяснил бы движения планет, если бы их орбиты были известны ему так же точно, как они известны и в наши дни»³³². Тем не менее, мысль о существовании нижней границы ϵ -интервала определяет постоянное стремление к увеличению точности измерений или к проверке ранее выполненных измерений. Так сказать, это естественный скептицизм, вызванный относительностью понятий. Что же касается верхней границы, то её существованием, как правило, не интересуются вовсе, пока абстракция «работает». Но на стадии принятия или отклонения абстракции вопрос о точности эксперимента, по данным которого индуцируется абстракция, является весьма существенным: чтобы отличить эллиптическую орбиту от круговой, необходима точность измерений не менее двух минут.

Очевидно, что согласно гипотезе о гносеологической точности, нет *гносеологической необходимости* считать абстракцию верной лишь с той степенью точности, с какой выполнены измерения, положенные в ее основу (обычная точка зрения современных методологов прямо противоположна!). Однако при этом не исключается, что заметное, иногда значительное, повышение точности измерений (разрешающей способности различения) может вывести за границы *интервала гносеологической точности* данной абстракции, привести к расхождению свойств абстракции и опыта и даже выявить непригодность абстракции для описания опыта. Но это будет непригодность для описания не «опыта вообще», а только опыта *постороннего*, внешнего для данной абстракции.

Таким образом, интервальная концепция методологии науки предлагает две основных гипотезы для решения вопроса об истинности теоретических абстракций на каждом этапе развития научного знания: 1) гипотезу об интервальном характере «поведения природы» и 2) гипотезу о гносеологической точности этих абстракций.

Первая гипотеза отчасти возвращает нас к образу мысли античной философии, в частности к Аристотелю, полагавшему, что математическую (бесконечную) точность необходимо требовать не во всех случаях, а лишь тогда, когда речь идёт об объектах, у которых нет материи. Эта гипотеза утверждает, по существу, что в своём метрическом опыте мы только моделируем *собственный опыт природы*. И это счастливое обстоятельство не только позволяет обходиться без точечных образов, заменяя их интервальными, но и гарантирует — а это главное — *истинность* абстракций, порождённых нашим несовершенным опытом³³³.

Вторая гипотеза вводит вопрос об объективности (истинности) абстракций (научного закона, теории и пр.) в границы их определённой метрической точности — верхней, минимально необходимой для создания абстракции, и нижней, максимальной, за которой теряется целесообразность использования или же самый смысл абстракции.

Эрвин Шрёдингер приводит характерный пример такого рода. Речь идёт об использовании «крутильных весов» для измерения слабых электрических, магнитных или гравитационных сил. Попытки повысить точность этих весов «столкнулись с любопытным пределом, который чрезвычайно интересен сам по себе. Выбирая всё более и более лёгкие тела и более тонкую и длинную нить, чтобы сделать весы чувствительными ко всё более слабым силам, достигают предела, когда подвешенное тело становится уже чувствительным к ударам теплового движения окружающих молекул и начинает исполнять нерерыв-

ный “танец” около своего равновесного положения... Это поведение не определяет ещё абсолютного предела точности измерений на подобных весах, однако оно всё-таки указывает практически на предел измерений»³³⁴.

Надеюсь, ясно, в каком смысле интервальная точка зрения, во-первых, меняет традиционное представление о векторе «теория — объективная реальность» и, во-вторых, вносит финитный смысл в эту векторную идею. Она по-прежнему позволяет уподоблять (пользуясь известным примером Николая Кузанского³³⁵) теорию (абстракцию) окружности, а многоугольники, вписываемые в эту окружность или описываемые вокруг неё, — множеству эмпирических ситуаций, которые аппроксимируют (моделируют) теорию с конечной точностью. Но она предлагает эмпирическую ситуацию считать *гносеологически точной* моделью теории. В этом случае согласие между теорией и опытом обеспечено, поскольку интервал гносеологической точности — это только теоретическое выражение границ, в которых *абстракция объективирована опытом*. Но этого, по видимому, и достаточно для того, чтобы оправдать притязания научных теорий на их абсолютную истинность в том смысле, о каком уже говорилось в разделе, посвящённом интервалу абстракции и какой, возможно, имел в виду Пуанкаре, говоря, что опыт, породивший теорию, уже не может ее разрушить.

Чтобы закончить тему гносеологической точности, замечу, что в действительной драме познания степень адекватности отображения того, что мы называем объективной реальностью, как правило, не поддаётся точной оценке. И хотя, к примеру, в теории ошибок (в теории и практике приближённых вычислений) обычно говорят об истинном значении измеряемой величины — этот, по существу «точный образ», только *гипотеза*. Зачастую он неопределим, а только как-то уточняем за счёт понятия о границах его фактических приближений (задаваемых, кстати сказать, неоднозначно). Но согласимся, что о «приближении» уместно говорить лишь тогда, когда известно то, к чему приближаются. В результате подлинным *dramatis personae* в численном анализе оказывается интервальный, а не точечный образ измеряемой величины. Последний остаётся своего рода идеальной (парадигмальной) предпосылкой познания.

Если ограничиться классической моделью, то этот частный пример из теории измерений *mutatis mutandis* обобщается на класс эмпирических условий, влияющих на формирование образов реальности, поскольку в этой модели «элемент концептуализации подразумевается на всех уровнях реальности»³³⁶. Но тогда возникает

естественный вопрос — оправдана ли (и насколько) точка зрения, что абстракция является символом (выражением) «приближённого описания, вторжением субъективных взглядов в точный мир»³³⁷.

Если в онтологию допускается абстрактная реальность, то по меньшей мере сомнительно, что научное знание на любом этапе его «теоретической жизни» имеет принципиально приближённый характер. Такая философия побуждала бы нас заключить, «что наука неизбежно пребывает в заблуждении», поскольку результаты, полученные «каждым последующим поколением учёных» должны рассматриваться только как «более хорошее приближение к конечной (неизвестно какой — *М.Н.*) доктрине»³³⁸.

Интервальная концепция, напротив, основывается на *принципе самодостаточности абстракций*. Она исходит из того, что, хотя информация, извлекаемая из опыта, обусловлена его точностью, это не означает, что той же точностью однозначно обусловлено и информационное содержание абстракции, связанной с этим опытом. Если любой опыт не обеспечивает информационной полноты знания, то о любой абстракции этого сказать нельзя. Абстракция, верная в пределах точности данного опыта, может оказаться (и если эта абстракция хорошая, то, как правило, и оказывается) верной в пределах более широкого опыта, когда точность неопределённо растёт. Следовательно, *энтропия опыта преодолевается именно за счёт абстракции*. Методологически это исключительно важно. Но, чтобы обосновать право на абсолютную истинность абстракции (на «абсолютность закона»), необходимо *указать меру её полноты*. Для случая гносеологической точности эта мера выражается интервальным числом, соответствующим классу ε -моделей абстракции.

7.5. Эпилог

Итак, кажется бесспорным, что для эмпирических ситуаций классический подход к понятию о тождестве неразличимых нуждается в «интервальных оговорках», поскольку в этих ситуациях диагональная точность — это гносеологический, а не арифметический ноль. В общем реальном процессе познания наш практический опыт заключен как бы внутри логарифмической шкалы, абсолютные концы которой — интервалы «0-*неразличимости*» и « ∞ -*неразличимости*» в их буквальном математическом смысле — фактически недостижимы. О внешнем мире мы информированы всегда настолько, насколько мы научились в нем различать. Для опыта нет бесконечно малых расстояний. Различия, к которым путь — бесконечность,

лишены эмпирического содержания. Но если классическое понятие равенства все же существует для опыта как проверяемая абстракция, то только в его интервальном смысле: это метафора, нисходящая в мир опыта в облике *интервальных равенств*.

Так обстоит дело с точки зрения методологической установки, ориентированной на практику и опыт. Непрерывность универсума, к которой мы приходим таким путем, лишь смутно похожа на классический континуум, созданный абстракциями Коши—Кантора—Дедекинда или лейбницевской инфинитной абстракцией бесконечно малых расстояний. И если в принципе ни математика, ни опыт не могут обойтись без «точечных образов», то расшифровка этих образов в математическом и эмпирическом знании различна. Каждый точечный образ эмпирической непрерывности «как бы окутан туманом» (А. Пуанкаре). И единственный способ рассеять этот туман — «трактовать феномен непрерывности классически»³³⁹, отображая ϵ -интервалы в математические точки как специфические коды ϵ -неразличимых.

Заключение

Эта книга не является механическим объединением прежних публикаций автора, выходявших в разных изданиях и в разное время, хотя результаты прежних исследований составляют её основу. Это итог многолетних размышлений над темой «абстракция». Неудивительно, что содержание книги ограничено собственной концепцией её автора. И тем не менее, для лучшего понимания проблем, затронутых в ней, желательно знакомство с книгами других отечественных авторов: Д.П.Горского («Вопросы абстракции и образование понятий», М., 1961), М.А.Розова («Научная абстракция и её виды», Новосибирск, 1965), Ю.А.Петрова (Логические проблемы абстракций бесконечности и осуществимости», М., 1967), Ф.В.Лазарева («О природе научных абстракций», М., 1971) и Ю.А.Гастева («Гомоморфизмы и модели», М., 1979). Пожелание для реализации, скажем, нелёгкое не только из-за обширности круга чтения, но и потому, что названных книг давно нет на полках книжных магазинов, а более поздних изданий не появлялось. Так уж случилось, что за последние двадцать лет тема абстракции была «снята с повестки для» российской методологии науки (да и не только российской). Но наука держится на непрерывности и преемственности её результатов. Их закрепление и сохранение — это, по мысли Гегеля, единственный способ, которым может быть обеспечено развитие науки. При этом «подлинная научность» не требует однообразия выводов и согласия исследователей по всем вопросам, в особенности если речь идёт о вопросах методологических. Вот почему всегда полезно руководствоваться советом Ф.М.Достоевского: «послушать везде, а не с одного лишь краю, чтобы составить понятие».

Примечания

- ¹ Эшби У.Р. Введение в кибернетику. М., 1959. С. 150. Тезис кажется парадоксальным, хотя парадоксальности в нём не больше, чем в замечании Макса Планка, что всё относительное в последнем основании связано с чем-либо абсолютным.
- ² Новосёлов М.М. О гносеологической точности // Философские вопросы технического знания. М., 1984. С. 135.
- ³ Галилео Галилей. Диалог о двух главнейших системах мира — Птолемеевой и Коперниковой. М.-Л., 1948. С. 88.
- ⁴ Там же. С. 89.
- ⁵ Вернадский В.И. Размышления натуралиста. Кн. 2. М., 1977. С. 25.
- ⁶ Цит. по кн.: Пайс А., Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна. М., 1989. С. 20.
- ⁷ Лузин Н.Н. Соч. Т. 2. М., 1958. С. 269.
- ⁸ Вернадский В.И. Труды по всеобщей истории науки. М., 1988. С. 58.
- ⁹ Расёва Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. М., 1972. С. 14. (Rasiowa H., Sikorski R., The Mathematics of Metamathematics, Warszawa, 1963, s. 8-9.).
- ¹⁰ Гейтинг А. Интуиционизм. М., 1965. С. 19.
- ¹¹ Об одной из версий, объясняющих причину разрыва, см. в кн.: Франк Ф. Философия науки. М., 1960.
- ¹² Бердяев Н.А. О человеке его свободе и духовности. М., 1999. С. 23.
- ¹³ Рассел Б. История западной философии, М., 1959, с. 7.
- ¹⁴ Вейль Г., Математическое мышление. М., 1989. С. 41-42.
- ¹⁵ Эйнштейн А. Физика и реальность. М., 1965. С. 67.
- ¹⁶ Герц Г. Принципы механики, изложенные в новой связи. М., 1959. С. 41.
- ¹⁷ Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. 4. М., 1967. С. 91.
- ¹⁸ Башляр Г. Новый рационализм. М., 1987. С. 29.
- ¹⁹ Рёссель Б. Проблемы философии. Пг., 1915. С. 5.
- ²⁰ «Неизменная научная истина составляет тот далёкий идеал, к которому стремится наука» (Вернадский В.И. Труды по всеобщей истории науки. М., 1988. С. 47) .
- ²¹ Destouches J.L. Méthode et méthodologie de la science // Atti del congresso di metodologia. Torino, 1952.
- ²² См.: Вернадский В.И. Труды... С. 51-52.
- ²³ Точка зрения Лазарева по этому вопросу исчерпывающим образом представлена в монографии: Кураев В.И., Лазарев Ф.В. Точность, истина и рост знания. М., 1988 и в более ранней его работе: Лазарев Ф.В. О природе научных абстракций. М.: Знание, 1971.
- ²⁴ Moore R.E. Interval analysis. Prentice-Hall, 1966.
- ²⁵ Льюис Г.Н. Анатомия науки. М.-Л., 1929. С. 7.
- ²⁶ Кант И. Соч. Т. 2. М., 1964. С. 261.
- ²⁷ Ленин В.И. Полное собрание сочинений. Т. 29. М., 1973. С. 203.
- ²⁸ Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. М., 1974. С. 19.
- ²⁹ Джэвонс Ст. Основы науки. Трактат о логике и научном методе. СПб, 1881. С. 97-98.
- ³⁰ Новосёлов М.М. Письмо // Большая Советская Энциклопедия. Т. 20. М., 1975. С. 424 или его же: Абстракция и научный метод // Логика научного познания. М., 1987.

- 31 *Аристотель*. Соч. Т. 4. М., 1984. С. 655.
- 32 *Фарадей М.* История свечи. М., 1980. С. 15.
- 33 См.: *Есенин-Вольпин А.С.* Связь // *Философская Энциклопедия*. Т. 4. М., 1967.
- 34 Об этом понятии см.: *Новосёлов М.М.* О гносеологической точности // *Философские вопросы технического знания*. М., 1984 или: *Novosyolov M.* On epistemological preciseness: Interval approach // *Science as a subject of study*. Editorial Board, Moscow, 1987.
- 35 *Кураев В.И., Лазарев Ф.В.* Точность, истина и рост знания... С. 69.
- 36 *Шрейдер Ю.А., Шаров А.А.* Системы и модели. М., 1982. С. 27.
- 37 *Эйнштейн А.* Физика и реальность. М., 1965. С. 78.
- 38 *Александров А.Д.* Проблемы науки и позиция учёного. Л., 1988. С. 121. Аналогичным образом и математика релятивизировала свои понятия относительно выразимости их значений в подходящих формальных системах. При этом вопрос «а как же на самом деле?» выносится за скобки и лишается смысла.
- 39 Этот принцип более естественным было бы связывать с (тоже интервальной) идеей независимости физической реальности от способов описания, чем с идеей её относительности.
- 40 Беседы Эпиктета. М., 1997. С. 113.
- 41 См.: *Новосёлов М.М.* О логике эмпирических неразличимостей // *Синтаксические и семантические исследования неэкстенциональных логик*. М., 1989; *Novosyolov M.M.* Sur les indiscernabilités comme structures algébriques // *Логические исследования*. Вып. 7. М., 2000.
- 42 См.: *Новосёлов М.М.* О некоторых понятиях теории отношений // *Кибернетика и современное научное познание*. М., 1976 или: БСЭ. Т. 24, кн. 1. М., 1976. С. 209.
- 43 *Хармут Х.Ф.* Теория секвентного анализа. Основы и применения. М., 1980. С. 88.
- 44 См.: *Эббот Э.Э.* Флатландия; *Бюргер Д.* Сферландия. М., 1976.
- 45 *Эйнштейн А.* Физика и реальность... С. 172.
- 46 О некоторых других методологических аспектах, связанных с понятием интервальной ситуации, см.: *Бажанов В.А., Новосёлов М.М.* Логика познания и логика абстракций в аспекте интервальной семантики // *Логика научного познания...* С. 216-220; *Кураев В.И., Лазарев Ф.В.* Точность, истина и рост знания... С. 31-41.
- 47 *Соловьёв В.* Избранное. М., 1990. С. 150-151.
- 48 См., например: *Chwolson O.D.* Traité de physique. Introduction générale. Т. 1. Paris, 1908.
- 49 *Метод в науках*. СПб., 1911. С. 111.
- 50 *Гуревич Л.Э.* Электродинамика. Л., 1940. С. 256.
- 51 *Бройль Л. де* Революция в физике: (Новая физика и кванты). М., 1965. С. 13.
- 52 «Вообще метод расщепления понятий (на два или большее их число) в соответствии с различными возможными оттенками есть один из наиболее важных способов уточнения (конкретизации) смысла выражений. Этот метод постоянно используется наукой, когда речь идёт именно о логическом анализе значения выражений и уточнении их смысла» (*Яновская С.А.* Предисловие // *Карнап Р.* Значение и необходимость. М., 1959. С. 11).
- 53 *Аристотель*. Соч. Т. 1. М., 1976. С. 326. Эту мысль позднее повторит и Лейбниц: «отвлечение не есть ошибка, лишь бы только мы знали, что то, что скрывается за отвлечением, существует» (*Лейбниц Г.В.* Новые опыты о человеческом разуме. М.-Л., 1936. С. 53).

- 54 См.: *Аристотель*. Соч. Т. 1. С. 277.
- 55 *Кант И.* Соч. Т. 3. М., 1964. С. 302. Рискну приоритет такого подхода приписать тому же Аристотелю: «Когда созерцают умом, необходимо, чтобы в то же время созерцали в представлениях: ведь представления — это как бы предметы ощущения ... только без материи» (*Аристотель*. Соч. Т. 1. С. 440).
- 56 В локально-конечный ориентированный граф без петель.
- 57 *Ньютон И.* Оптика. М.-Л., 1927. С. 331.
- 58 Замечательно, что многим сторонникам эмпиризма это не мешало утверждать, что в том, что не поддается математическому (абстрактному) описанию, нет достоверности, что природа не только не боится трудностей математического анализа, но и сама написана на языке математики.
- 59 *Кондильяк Э.Б. де.* Соч. Т. 2. М., 1982. С.12. См. также: *Беркли Дж.* Соч. М., 1978.
- 60 *Кант И.* Трактаты и письма. М., 1980. С. 399.
- 61 *Гегель Г.В.Ф.* Наука логики. Т. 3. М., 1972. С. 56.
- 62 *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. Изд. 2. Т. 36. С. 180.
- 63 *Вернадский В.И.* Труды по всеобщей истории науки. М., 1988. С. 210.
- 64 См.: *Мах Э.* Познание и заблуждение. М., 1909. С. 142.
- 65 В основном со стороны немецких неонтологов (Гуссерля и Кассирера). Я здесь опускаю ссылку на более раннюю критику Дж. Беркли, который был противником не только локковской, но и всякой иной теории абстракций. Кстати, позицию Беркли относительно локковской теории Кассирер называет «психологической критикой абстрактного», считая, что Беркли остаётся всецело в рамках традиционного взгляда на понятие.
- 66 *Кассирер Э.* Познание и действительность. СПб, 1912. С. 23.
- 67 *Клейн Ф.* Отзыв о сочинении Софуса Ли... // Об основаниях геометрии. М., 1956. С. 437.
- 68 Хотя с обещания продемонстрировать «идею множества» на примере начинается почти каждый учебник по теории множеств и функций.
- 69 *Beth E.W.* The foundations of mathematics. Amst., 1959. P. 471.
- 70 Такова, в частности, ситуация в формальной арифметике, где потребность в точных (рекурсивных) определениях, устанавливающих существование и единственность основных арифметических операций, является решающей и в методологическом и в логическом смысле.
- 71 Ср.: *Успенский В.А.* Теорема Гёделя о неполноте. М., 1982. С. 9.
- 72 *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. М., 1966. С. 14.
- 73 *Манин Ю.А.* Доказуемое и недоказуемое. М., 1979. С. 153. См. также: *Фейс К.* Алгебра, кольца, модули и категории. Т. 1. М., 1977. С. 581-582.
- 74 *Козн П.Дж.* Теория множеств и континуум-гипотеза. М., 1969. С. 40.
- 75 Так, традиционная аксиоматика отношений типа равенства, восходящая к Лейбницу и Вольфу, существенно суживала взгляд на свойства этих отношений. При этом анализ эмпирических (метрических) отношений равенства, для которых постулат транзитивности, вообще говоря, не выполняется, так и не был принят во внимание, пока ограничивались классом математических моделей.
- 76 По шутливому, но образному замечанию Д. Гильберта, наша личная «точка зрения» возникает тогда, когда пространство представлений о мире, называемое нашим умственным горизонтом, вырождается в одну из своих предельных точек. См.: *Физики продолжают шутить*. М., 1968. С. 71.

- 77 *Mannoury G.* Les deux pôles de l'esprit. Paris, 1932.
- 78 *Уайтхед А.Н.* Избранные работы по философии. М., 1990. С. 641.
- 79 См.: *Марков А.А.* О логике конструктивной математики. М., 1972. С. 8.
- 80 Ситуация сходна и в других языках. Во французском глагол *abstraire* имеет только переходную форму. Непереходной форме того же глагола соответствует речевой оборот «faire l'abstraction de».
- 81 Выбор познавательного аспекта очевидным образом отражается и в производных от этого слова. Так, в выражениях «абстрактный плод» или «абстрактный писатель» предикат имеет явно отрицательный смысл, тогда как в выражениях «абстрактный труд» или «абстрактная алгебра» — положительный.
- 82 *Гегель Г.В.Ф.* Наука логики. Т. 3. М., 1972. С. 38.
- 83 *Кант И.* Трактаты и письма. С. 398.
- 84 Там же. С. 399.
- 85 На первый взгляд это представляется не столько как различие по значению, сколько как различие по фразеологической связанности. Однако следует принять во внимание, что текстовое окружение способно играть смыслоразличительную и даже смыслопорождающую роль. Эта ситуация отчасти схожа с ситуацией в позиционных системах счисления, где сходные цифры системы помимо их свободных (натуральных) значений приобретают определённые контекстные значения в соответствии с их положением в линейной записи числа.
- 86 *Лузин Н.Н.* Собр. соч. Т. 2. 1958. С. 23.
- 87 См.: *Барендрегт Х.* Лямбда-исчисление. Его синтаксис и семантика. М., 1985.
- 88 *Бом Д.* Специальная теория относительности. М., 1967. С. 270.
- 89 *Гёльбер О.* Наглядное представление и мышление геометрии // Новые идеи в математике. СПб., 1914. Сб. 8. С. 79-80.
- 90 Насколько та или иная теория выражается в словах, настолько её предмет (её «природа») выражается в значениях этих слов. А эти значения необходимо абстрактны, как необходимо абстрактны значения слов вообще.
- 91 В своей теории тождества Фреге исходил, по-видимому, из другой точки зрения. В онтологии он имел в виду только тождество предметных, но не смысловых значений.
- 92 *Гегель Г.В.Ф.* Работы разных лет. Т. 2. М., 1971. С. 16.
- 93 См.: *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. М., 1981.
- 94 Аналогично высказался и Рассел: «математические понятия ничего не получают от чувств» (*Рассел Б.* Человеческое познание. М., 1957. С. 41).
- 95 *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? М., 1967. С. 224.
- 96 Об этом подробнее см.: *Лидоу Д.* Геометрия и искусство. М., 1979.
- 97 *Шанин Н.А.* О критике классической математики // Труды матем. института им. В.А. Стеклова. LXVII. Проблемы конструктивного направления в математике 2. М.-Л., 1962. С. 284.
- 98 *Мах Э.* Познание и заблуждение. М., 1909. С. 145.
- 99 То, что между элементарной и проективной лежат аффинная и неевклидовы геометрии, только усиливает эту нашу обязанность.
- 100 Проективная геометрия является хорошим примером максимальной верхней границы такого рода цепи, поскольку проективная геометрия — это в известном смысле «вся геометрия».

- ¹⁰¹ Математическая энциклопедия. Т. 1. М., 1977. С. 443.
- ¹⁰² Яновская С.А. Проблемы введения и исключения абстракций более высоких (чем первый) порядков // The foundation of statements and decisions. Warszawa, 1965.
- ¹⁰³ Так, Кант указывает на математику, в которой, по его мнению, вполне удовлетворяется это требование: в геометрии – ввиду наглядности фигур, в арифметике – ввиду наглядности целых чисел, чувственно представимых на «пальцах, костяшках счётов или палочках и точках» (Кант И. Соч. Т. 3. М., 1964. С. 302).
- ¹⁰⁴ Freudenthal H. Logique mathématique appliquée. Paris – Louvain, 1958. P. 46.
- ¹⁰⁵ См.: Bain A. Logic inductive and deductive. L., 1870.
- ¹⁰⁶ Подробнее об этой трудности см.: Есперсен О. Философия грамматики. М., 1958. Гл. X.
- ¹⁰⁷ Энгельс Ф. Из подготовительных работ к «Анти-Дюрингу» // Маркс К., Энгельс Ф. Соч. Изд. 2. Т. 20. С. 631.
- ¹⁰⁸ Фейнман Р. Характер физических законов. М., 1968. С. 119.
- ¹⁰⁹ Дьедонне Ж. Линейная алгебра и элементарная геометрия. М., 1972. С. 28.
- ¹¹⁰ См.: Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Т. 1. М., 1979.
- ¹¹¹ См.: Девис М. Прикладной нестандартный анализ. М., 1980; Успенский В.А. Нестандартный, или неархимедов, анализ. М., 1983.
- ¹¹² Цит. по кн.: Кудрявцев П.С. Курс истории физики. М., 1982. С. 165.
- ¹¹³ О попытках такого рода см., например, в кн.: Бажапов В.А. Проблема полноты квантовой теории: поиск новых подходов. Казань, 1983.
- ¹¹⁴ Тьугу Э.Х. Концептуальное программирование. М., 1984. С. 15.
- ¹¹⁵ Frege G., Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel, Bd. 2, S. 142.
- ¹¹⁶ Frege G. The Foundations of Arithmetic // Цит. по кн.: Тулмин Ст. Человеческое понимание. М., 1984. С. 70. Полезно сравнить это высказывание Фреге со словами Платона, вынесенными в эпиграф этого параграфа.
- ¹¹⁷ О процессах эволюции и революции с точки зрения биолога см. например: Любищев А.А. Проблемы формы, систематики и эволюции организмов. М., 1982.
- ¹¹⁸ «Постоянные величины существуют только в нашем уме как продукт отвлечённого мышления» (Жегалкин И.И., Слудская М.И. Введение в анализ. М., 1935. С. 64).
- ¹¹⁹ В этом случае время для нас не только непрерывно «течёт», но и течёт равномерно.
- ¹²⁰ Лузин Н.Н. Дифференциальное исчисление. М., 1961. С. 56.
- ¹²¹ «Мне казалось, что время остановилось и я погружён в какую-то всемирную немоту. На самом же деле прошло несколько секунд, и я услышал незнакомый и вместе с тем будто бы очень знакомый голос: – Какого дьявола расстреливаете! Забыли приказ?» (Паустовский К. Повесть о жизни. М., 1966. Т. 1. С. 671).
- ¹²² Достоевский Ф.М. Полн. собр. соч. М., 1978. Т. 18. С. 97.
- ¹²³ Путём астрономических или физических наблюдений.
- ¹²⁴ «Если бы не существовало закона сохранения тяжёлых частиц, то менее чем за тысячную долю секунды всё вещество Вселенной распалось бы на электроны и нейтрино» (Орир Дж. Популярная физика. М., 1966. С. 402).

- 125 «Этот космос... есть и будет вечно живым огнём» (*Гераклит. Фрагменты // Материалисты древней Греции. М., 1955. С. 44*).
- 126 Всё совершается согласно логосу, говорил Гераклит, а логос – это «мера назначенного круга времени».
- 127 См.: *Уитроу Дж. Естественная философия времени. М., 1964. Гл. 3.*
- 128 *Вейль Г. Математическое мышление. М., 1989. С. 157.* Наглядную (феноменологическую) непрерывность Ф.Клейн называет «кажущейся», не усматривая в ней достаточных условий для точной математической трактовки. Почему? Да потому, что в этой непрерывности «все точки прямой тождественны, так как они все имеют одни и те же свойства» (*Лузин Н.Н. Соч. Т. 2. М., 1958. С. 264*). Отождествление арифметической и объективной (феноменологической) непрерывности – это постулат, на который нет запросов, кроме запросов анализа.
- 129 См.: *Рейхенбах Г. Направление времени. М., 1962. Гл. 2.*
- 130 См.: *Драгалин А.Г. Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М., 1979. С. 18.*
- 131 Вот секвенциальный вариант доказательства этой теоремы в минимальной логике: $A, A, B \Rightarrow A; A, A \Rightarrow (B \supset A); A, A, \neg (B \supset A) \Rightarrow \text{abs}; A, \neg (B \supset A) \Rightarrow \neg A; A \Rightarrow (\neg (B \supset A) \supset \neg A); \Rightarrow A \supset (\neg (B \supset A) \supset \neg A)$.
- 132 Цит. По кн.: *Ахманов А.С. Логическое учение Аристотеля. М., 1960. С. 279.*
- 133 Более точно я определил бы эту абстракцию так: каково бы ни было A , всегда найдётся такая окрестность A , что будет истинна формула $(A \supset A)$.
- 134 См.: *Новосёлов М.М., Тожество // Философская Энциклопедия, т. 5, М., 1970.*
- 135 «... от смерти к смерти идёт тот, кто видит здесь (в объективном мире – *М.Н.*) что-либо, подобное различию...» (*Упанишады, М., 1967, с. 108*).
- 136 «Физики говорят, что можно сосчитать общее количество элементарных частиц, например электронов, но нельзя каждой частице приписать определённый номер, так как частицы эти неразличимы в буквальном смысле» (*Пирс Дж. Символы, сигналы, шумы. М., 1967. С. 20*).
- 137 «Исходя из этого принципа, Лейбниц отвергал возможность существования атомов... На основании тождественности всех электронов мы теперь можем сделать вывод о ложности этого принципа» (*Фейнберг Дж. Из чего сделан мир? М., 1981. С. 88-89*). Я не присоединяюсь здесь к этому заключению, но и не оспариваю его. В дальнейшем у меня будет случай к нему вернуться.
- 138 Более подробную историю вопроса можно найти в кн.: *Штёкль А. История средневековой философии. СПб., 1996*, или в кн.: *Коплстон Ф.Ч., История средневековой философии. М., 1997*; или в кн: *Jorge J., Gracia E. Introduction to the Problem of Individuation in the Early Middle Ages. Munich, 1984.*
- 139 См.: *Фейербах Л. История философии. М., 1974. С. 136; Brochard V. Sur la logique des stoïciens // Études de philosophie modern. Paris, 1912.* Судя по работе: *Sedley D. Le critère d'identité chez les stoïciens // Revue métaphysique et de Morale. № 4. 1989*, стоики не видели разницы между индивидуацией и тождеством.
- 140 «Есть очень большая трудность в определении... индивидуальности. Тут невозможно дать строгого научного определения» (*Бердяев Н.А. Русская идея... // О России и русской философской культуре. М., 1990. С. 43*).
- 141 Об индивидуации у Аристотеля подробнее см.: *Lloyd A.C. Aristotele's Principle of Individuation // Mind. Vol. LXXIX, № 316. P. 519-529.* Моё толкование темы не зависит от этой статьи.

- ¹⁴² Отсюда смысл и значимость всех гуманитарных принципов, защищающих свободу личности и права человека.
- ¹⁴³ *Аристотель*. Метафизика. М.-Л., 1934. Кн. 3. Гл. 4; Кн.7. Гл. 8.
- ¹⁴⁴ К этому важному положению (тезису) я ещё вернусь, а пока отмечу только мысль Н.Н. Лузина, что истинно полезны в математическом познании (теории) только те идеальные объекты, которые индивидуально различимы (индивидуализируемы).
- ¹⁴⁵ *Лейбниц Г.В.* Соч. Т. 1. М., 1982. С. 134.
- ¹⁴⁶ *Лейбниц Г.В.* Новые опыты о человеческом разуме. М.-Л., 1936. С. 53.
- ¹⁴⁷ *Локк Дж.* Соч. Т. 1. М., 1985. С. 382.
- ¹⁴⁸ «Математически точным указанием координат пространства для данного момента времени мы выделяем, в силу непроницаемости материи, вполне однозначно, — так, что немислимо никакое смешение, — любой абсолютно простой, как и крайне сложный, объект, не нуждаясь для этой цели в перечислении тех или иных его признаков и свойств» (*Чурлов А.А.* Очерки по теории статистики. М., 1959. С. 59-60).
- ¹⁴⁹ «Какой бы сложной комбинацией свойств мы ни характеризовали данный объект, никогда нельзя поручиться, что там или здесь, если не в настоящее время, то в отдалённом будущем или в глубоком прошлом, эта комбинация не воспроизведётся» (Там же. С. 58). См. также: *Гоббс Т.* Соч. Т. 1. М., 1964. С. 163-164.
- ¹⁵⁰ «Если две вещи совершенно одинаковы, то из-за этого они всё же не перестают быть двумя вещами» (из письма Кларка к Лейбницу // *Лейбниц Г.В.* Соч. Т. 1. М., 1982. С. 458).
- ¹⁵¹ *Лейбниц Г.В.* Соч. Т. 2. М., 1983. С. 290-291.
- ¹⁵² Постулат об обязательном существовании таких свойств — это уже предмет веры.
- ¹⁵³ Эта и все последующие терминологические новшества, касающиеся индивидуации, были введены в моих ст.: *Новосёлов М.М.* Категория тождества и её модели // *Кибернетика и диалектика*. М., 1978; *он же*. Об абстракциях неразличимости, индивидуации и постоянства // *Творческая природа научного познания*. М., 1984.
- ¹⁵⁴ См.: *Математическая Энциклопедия*. Т. 1. М., 1977. С. 219.
- ¹⁵⁵ «Признание того или иного предмета за индивидуальность зависит... от той или иной точки зрения» (*Филитов М.М.* Популярные лекции по логике. СПб., 1901. С. 13).
- ¹⁵⁶ См.: *Гоббс Т.* Избранные произведения. Т. 1. М., 1964. С. 63.
- ¹⁵⁷ См.: *Лейбниц Г.В.* Соч. Т. 2. М., 1983. С. 291.
- ¹⁵⁸ *Калмогоров А.Н.* Теория информации и теория алгоритмов. М., 1987. С. 241.
- ¹⁵⁹ Об особом статусе самоидентичности см. ниже.
- ¹⁶⁰ *Лузин Н.Н.* Соч. Т. 2. М., 1958. С. 269.
- ¹⁶¹ *Лейбниц Г.В.* Избранные философские сочинения. М., 1890. С. 352.
- ¹⁶² *Данте А.* Новая жизнь // *Божественная комедия*. М., 1967. С. 524.
- ¹⁶³ *Шанин Н.А.*, Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства // *Труды математического института им. В.А. Стеклова*. Т. LXVII. М., 1962. С. 286.
- ¹⁶⁴ *Кантор Г.* Труды по теории множеств. М., 1985. С. 246.
- ¹⁶⁵ *Шанин Н.А.* Конструктивные вещественные числа... С. 286.

- 166 *Эйби У.Р.* Введение в кибернетику. М., 1959. С. 178. В русском переводе место многоточия занято словом «бывает». Я его опустил, чтобы подчеркнуть контрастность противопоставления, что в известном смысле меняет мысль автора.
- 167 *Новосёлов М.М.* Тожество // *Философская Энциклопедия*. Т. 5. М., 1970. Лейбниц нечто подобное подразумевает, но явно, как абстракцию, не формулирует.
- 168 Кажется, Х. Зигварт первый высказал эту мысль. В его истолковании принцип «А есть А» надо понимать так, что «всякий объект ... должен быть мыслим именно как этот, а не как какой-либо иной» (*Зигварт Х.* *Логика*. Т. 1. СПб., 1908. С. 94).
- 169 *Кассирер Э.* Познание и действительность. СПб., 1912. С. 58. У Кассирера речь идёт об индивидуации точек континуума.
- 170 См.: *Кант И.* *Критика чистого разума* // Соч. Т. 3. С. 322.
- 171 *Девис П.* *Суперсила*. М., 1989. С. 55 (*Davies P.* *Superforce*. N.Y., 1985).
- 172 См.: *Фейнберг Дж.* Из чего сделан мир... С. 88.
- 173 См.: *Вейль Г.* *Дополнения* // *Прикладная комбинаторная математика*. М., 1968. С. 320 (Это перевод из кн.: *Weyl H.* *Philosophy of Mathematics and Natural Sciences*. Princeton, N.Y.)
- 174 *Кант И.* Соч. Т. 3. С. 322.
- 175 Об этой философии «континуума» подробнее см.: *Вейль Г.* *Математическое мышление*. М., 1989. С. 153-160.
- 176 Описание этого парадокса можно найти в любом солидном учебнике по математической логике или теории множеств. Из книг на русском языке назову следующие: *Френкель А.А., Бар-Хиллел И.* *Основания теории множеств*. М., 1966; *Карри Х.* *Основания математической логики*. М., 1969; *Клини С.К.* *Математическая логика*. М., 1973.
- 177 Популярно о понятии «определимость» см. одноимённую статью в кн.: *Философская Энциклопедия*. Т. 4. М., 1967. С. 153-154.
- 178 *Фор А.* *Восприятие и распознавание образов*. М., 1989. С. 14.
- 179 См.: *Acta mathematica*. 1906. Т. 30. P. 296.
- 180 См.: *Borel E.* *Leçons sur la théorie des fonctions*. Paris, 1928. Note IV.
- 181 *Вейль Г.* *Математическое мышление...* С.155.
- 182 См.: *Мартин-Лёф П.* *Очерки по конструктивной математике*. М., 1975. С. 48-52.
- 183 *Лузин Н.Н.* *Собр. соч.* М., 1958. Т. 2. С. 441; Ср.: *Skolem Th.* *Selected in Logic*. Oslo, 1970. P. 633-638.
- 184 *Винер Н.* *Творец и робот*. М., 1966. С. 47.
- 185 *Колмогоров А.Н.* *Теория информации и теория алгоритмов*. М., 1987. С. 218.
- 186 Там же. С. 216. Ответственность за корректное использование этих и предыдущих слов А.Н.Колмогорова, высказанных им в другом контексте, я беру, разумеется, на себя.
- 187 См.: *Большая Советская Энциклопедия*. Т. 26. М., 1977. С. 31 (79).
- 188 *Локк Дж.* *Соч.* Т. 2. М., 1985. С. 252.
- 189 *Кассирер Э.* *Познание и действительность*. СПб., 1912. С. 26.
- 190 *Кант И.* *Соч.* Т. 2. М., 1964. С. 76.
- 191 *Russell B.* *Meinong's Theory of Complexes and Assumption* // *Mind*. XIII. 1904. P. 338.
- 192 См.: *Griss G.F.C.* *La mathématique intuitioniste sans negation* // *Nieuw Archief voor Wiskunde*. (3), III. 1955; или: *Гейтинг А.* *Интуиционизм*. М., 1965. С. 149-151, 156-157 или: *Новосёлов М.М.* *Положительная логика* // *Философская Энциклопедия*. Т. 4. М., 1967.

- 193 См., например: *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М., 1979. Гл. I и V.
- 194 Эту несколько парадоксальную фразу я готов подкрепить следующим примером, имеющим также прямое отношение к проблеме индивидуации: « – А вы за что, Орест Николаевич? Он сокрущённо развёл руками, устало вздохнул. Его бледное, худое лицо с чуть выпуклыми глазами и тонким заострённым носом как-то одеревенело. – Я убил самого себя... – ужим голосом проговорил Конокотин. – Да, представьте!... Обвинили в том, будто я, пользуясь сходством со старым большевиком и политработником Орестом Конокотиным, убил его и завладел документами... Никаких свидетельских показаний, что я – действительно я, Конокотин настоящий, – во внимание не принимали» (*Дьяков Б.* Повесть о пережитом. М., 1966. С. 34-35).
- 195 Цит. по кн.: *Уколова В.И.* «Последний римлянин» Бозций. М., 1987, с. 99. См. также: *Бозций.* «Утешение философией» и другие трактаты. М., 1990. С. 282.
- 196 *Марков А.А.* О логике конструктивной математики. М., 1972. С. 9.
- 197 *Frege G.* Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildeten Formelsprache des reinen Denkens. § 8, S. 15.
- 198 *Jevons W. S.* The substitution of similars the principle of reasoning. L., 1869. § 20. P. 24.
- 199 *Шатуновский С. О.* Введение в анализ. Одесса, 1923. С. 18.
- 200 *Марков А. А.* О логике конструктивной математики.
- 201 Там же.
- 202 *Novoselov M.* Identity with a measure of transitivity // LMP'S'87, Abstracts. v. 4, Part 2, section 6; *Новосёлов М.М.* О некоторых понятиях теории отношений // Кибернетика и современное научное познание. М., 1976. С. 261.
- 203 Подробнее об этом в разделах, посвященных абстракции неразличимости.
- 204 «В силу этого мы в наших рассуждениях ... вправе отождествлять одинаковые...» // *Марков А.А.* Элементы математической логики. М., 1984. С. 9.
- 205 См.: *Марков А.А.* Теория алгорифмов // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. М., 1954. С. 7-8.
- 206 *Шанин Н.А.* О некоторых логических проблемах арифметики // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. XLIII. М., 1955. С. 15.
- 207 *Марков А.А.* Элементы математической логики... С. 9.
- 208 *Кушнер Б.А.* Лекции по конструктивному математическому анализу. М., 1973. С. 27.
- 209 *Гегель Г.В.Ф.* Наука логики. М., 1971. Т. 2. С. 33.
- 210 Там же. С. 35.
- 211 *Горский Д.П.* Вопросы абстракции и образование понятий. М., 1961. С. 24; *Кондаков Н.И.* Логический словарь-справочник. М., 1975.
- 212 *Гёпфдинг Г.* Философские проблемы. М., 1904. С. 60.
- 213 Если в понятие тождества вкладывать собственно логический смысл, то ни о каком «тождестве различных», по определению, не может быть и речи. Отождествлений одинаковых, конечно, много, но тождество как понятие – единственно.
- 214 *Новосёлов М.М.* Категория тождества и её модели // Кибернетика и диалектика. М., 1978. С. 200. Замечу, что эта аксиома обеспечивает транзитивность одинаковости при условии, что признаки, по которым мы обобщаем, не являются «расплывчатými» (нечёткими) признаками.

- 215 См.: *Марков А.А.* О логике конструктивной математики. М., 1972. С. 9-10; *Марков А.А., Нагорный Н.М.* Теория алгоритмов. М., 1984. С. 36.
- 216 Об эффективизме см.: *Гливенко В.И.* Кризис основ математики на современном этапе его развития // Сб. статей по философии математики. М., 1936; *Медведев Ф.А.* Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX – XX вв. М., 1976; а также мои одноимённые ст. в Философской Энциклопедии (Т. 5. М., 1970) и в Философском Энциклопедическом словаре (М., 1989).
- 217 *Лузин Н.Н.* Собр. соч. Т. II. 1958. С. 708.
- 218 *Есенин-Вольпин А.С.* Анализ потенциальной осуществимости // Логические исследования. М., 1959; *его же.* К обоснованию теории множеств // Применение логики в науке и технике. М., 1960; *Ésénine-Volpine A.S.* Le programme ultra-intuitionniste des fondements des mathématiques // Infinitistic methods. NY. – Oxf. – L. – Paris – Warszawa, 1961; *Rieger L.* Sur le problème des nombres naturels // Там же.
- 219 См.: *Есенин-Вольпин А.С.* Парадокс // Философская Энциклопедия. Т. 4. М., 1967. С. 208.
- 220 Об этих определениях можно, в частности, прочитать в кн.: *Яновская С.А.* Методологические проблемы науки. М., 1972. С. 34-75.
- 221 *Гастев Ю.А.* Гомоморфизмы и модели. М., 1975. С. 134.
- 222 Характерно, что понятие тождества для натуральных чисел А.Гейтинг относит к «доматематике», полагая, что здесь методы могут быть существенно иные (Р.Курант, между прочим, к доматематике относит и понятие о натуральных числах). Взгляд на тождество, о котором говорит Гейтинг, весьма близок к позиции Грисса. Определение понятий «тождественность» и «совпадение» Гейтинг приводит только для вещественных чисел (см. *его:* Интуиционизм. М., 1965).
- 223 Об определениях через абстракцию лучшее изложение на русском языке см.: *Яновская С.А.* Методологические проблемы науки. М., 1972. С. 34-75.
- 224 Более тридцати лет назад я обратил внимание гносеологов на этот замечательный факт; см.: *Новосёлов М.М.* Принцип абстракции // Философская Энциклопедия. Т. 4. М., 1967.
- 225 *Beth E.W.* Über Lockes «Allgemeines Dreieck» // Kant-Studien. Bd. 48, Hft. 3. 1956/1957. S. 361. Пользуюсь случаем и выражаю мою признательность В.М. Постоловской, которая познакомила меня с содержанием этой работы Бета.
- 226 *Рёссель Б.* Проблемы философии. Пг., 1915. С. 60.
- 227 *Марков А.А.* О логике конструктивной математики. М., 1972. С. 18-19.
- 228 Начала Евклида. Кн. 1- 4. М.- Л., 1950. С. 44.
- 229 *Шереметевский В.П.* Очерки по истории математики. М., 1940. С. 30.
- 230 *Beth E.W.* Über Lockes... S. 367.
- 231 Для примера см.: *Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю.* Геометрия. М., 1990.
- 232 Если, конечно, считать, что в сфере идеального, в сфере понятий вообще индукции нет. Например, Аристотель говорит: «Индукция невозможна без чувственного восприятия» (см. *его:* Аналитики. М., 1952. С. 217), так как отдельное, единичное познаётся только посредством чувств.
- 233 *Сойер У.У.* Прелюдия к математике. М., 1965. С. 40.
- 234 *Эйби У.Р.* Введение в кибернетику. М., 1959. С. 153.
- 235 *Аристотель.* Метафизика. М.-Л., 1934. С. 19.
- 236 См.: *Новосёлов М.М.* Принадлежит ли Локку «правило Локка»? // Логические исследования. Вып. 6. М., 1999.

- 237 См.: *Лазарев Ф.В., Новосёлов М.М.* Обобщение // БСЭ. Т. 18. М., 1974 или: *Новосёлов М.М.* Типы научных обобщений // Анализ системы научного знания. Саратов, 1976.
- 238 *Новосёлов М.М.* Типы научных обобщений... С.47.
- 239 *Рассел Б.* Почему я не христианин. М., 1987. С. 37.
- 240 *Платон.* Соч. Т. 3, ч. 1. М., 1971. С. 303.
- 241 «Государство» 511, *Платон.* Соч. Т. 3, ч. 1. М., 1971. С. 319.
- 242 *Платон*, там же, те же.
- 243 «Федон» 99 е, *Платон.* Соч. Т. 2. М., 1970. С. 70.
- 244 *Пуанкаре А.* О науке. М., 1983. С. 21.
- 245 *Аристотель.* Метафизика. М., 1934. С. 50.
- 246 Эта мысль вполне современна, ведь мы и сегодня стремимся неточные данные опыта заменяя на точные абстрактные понятия, чтобы иметь надёжную основу для дальнейших точных рассуждений.
- 247 *Аристотель.* Метафизика... С. 51.
- 248 Там же. С. 222.
- 249 Там же. С. 221.
- 250 *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М., 1959. Гл. 1, § 3.
- 251 В «чистом исчислении» единичных терминов вовсе нет.
- 252 См.: *Аристотель*, Аналитики первая и вторая, М., 1952, с. 191-192.
- 253 *Аристотель.* Аналитики... С. 242.
- 254 *Аристотель.* Метафизика... С. 238.
- 255 *Аристотель.* Аналитики... С. 217-218.
- 256 Там же. С. 242-243.
- 257 Цит. по кн.: *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика... С. 107.
- 258 *Рассел Б.* История западной философии. М., 1959. С. 565.
- 259 *Гоббс Т.* Избранные произведения. М, 1964. Т. 1. С. 456.
- 260 Там же. Т. 2. С. 68-69.
- 261 Там же. Т. 1. С. 119.
- 262 Там же. С. 12.
- 263 Там же.
- 264 *Аристотель.* О частях животных. Цит. по кн.: *Зубов В.П.* Аристотель. М . . , 1963. С. 117.
- 265 *Гоббс Т.* Соч. Т. 1. М., 1964. С. 236.
- 266 *Юнг К.Г.*, Психологические типы, М., 1997, с. 56.
- 267 *Локк Дж.*, Соч., т. 2, М., 1985, с. 39.
- 268 Там же. С. 130.
- 269 *Витгенштейн Л.* Лекции..., // Людвиг Витгенштейн: человек и мыслитель. М., 1993. С. 288-89.
- 270 Непоследовательность и противоречивость («нелогичность») позиции Локка отмечал, в частности, и Лосский. См.: *Лосский Н.О.* Избранное. М., 1991. С. 24-25.
- 271 *Beth E.W.* Über Lockes... S. 365.
- 272 *Локк Дж.* Соч. Т. 2. М., 1985. С. 74.
- 273 Там же. С. 57.
- 274 Там же. С. 8-9.

- 275 Это вполне соответствует философским установкам современного математического интуиционизма: «Математическое построение должно быть таким непосредственным для разума и его результат должен быть столь ясным, чтобы не нуждаться ни в каких обоснованиях. Можно очень хорошо понимать, является ли рассуждение правильным, не пользуясь логикой; достаточно ясного научного сознания» (*Гейтинг А.* Интуиционизм. М., 1965. С. 14).
- 276 Локк Дж. Соч. Т. 2. С. 7.
- 277 Ср.: *Драгалин А.Г.* Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М., 1979. С. 18.
- 278 Локк Дж. Соч. Т. 2. С. 7.
- 279 *Яновская С.А.* О роли математической строгости в творческом развитии математики и специально о «Геометрии Декарта» // Историко-математические исследования. Вып. 17. М., 1966. С. 160.
- 280 См.: *Новосёлов М.М.* Принцип абстракции, понятие тождества и «правило Локка»: Автореф... канд. дисс. М., 1970.
- 281 Сожалею, что написав, что в «прикладном исчислении предикатов широко используется правило обобщения, носящее имя Локка, в произведениях которого встречаются первые формулировки этого правила логики» (*Горский Д.П.* Обобщение и познание. М., 1985. С. 109), автор не указал, где и в каких именно произведениях Локка встречаются эти «первые формулировки». Лейбниц, очень внимательно прочитавший основное сочинение Локка и сделавший обширный его разбор, вряд ли упустил бы возможность указать на это правило.
- 282 *Лейбниц Г.В.* Новые опыты о человеческом разуме. М., 1936. С. 317-18.
- 283 *Новосёлов М.М.* Непосредственное умозаключение // Философская Энциклопедия. Т. 4. М., 1967.
- 284 *Лейбниц Г.В.* Соч. Т. 3. М., 1984. С. 76-77.
- 285 *Арно А., Николь П.* Логика, или искусство мыслить. М., 1991. С. 39.
- 286 *Рассел Б.* Мудрость Запада. М., 1998. С. 334.
- 287 *Беркли Дж.* Соч. М., 1978. С. 157, 158.
- 288 Там же. С. 154.
- 289 Там же. С. 159, 160.
- 290 Там же. С. 162-163.
- 291 Там же. С. 164.
- 292 *Юм Д.* Соч. Т. 1. М., 1965. С. 109.
- 293 Там же. С. 111.
- 294 *Beth E.W.* Über Lockes... S. 367.
- 295 См.: *Beth E.W.* On a certain System of Natural Deduction // Proceedings of the Section of Sciences, Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. vol. 58, series A (1955). На русском интуитивно очень ясная модификация табличного варианта приводится в кн.: *Ненейвода Н.Н.* Прикладная логика. Ижевск, 1997. Гл. 9.
- 296 *Beth E.W.* Über Lockes ... S. 371.
- 297 См.: *Марков А.А.* О логике конструктивной математики. М., 1972. § 7.
- 298 *Клини С.К.* Математическая логика. М., 1973. С. 63.
- 299 См.: *Гейтинг А.* Интуиционизм. М., 1965. С. 14-15.
- 300 *Кант И.* Соч. Т. 3. М., 1964. С. 614.
- 301 По терминологии Ю.А. Шрейдера. См. например: *Виленкин Н.Я., Шрейдер Ю.А.* Понятия математики и объекты науки // Вопросы философии. № 2. 1974.

- 302 *Аристотель. Аналитики...* М., 1952. С. 191.
- 303 См.: *Новосёлов М.М.* Принцип абстракции, понятие тождества и «правило Локка»... М., 1970.
- 304 *Рассел Б.* Мудрость Запада... С. 334.
- 305 *Ненейвода Н.Н.* Прикладная логика. Ижевск, 1997. С. 58.
- 306 См.: *Гейтинг А.* Обзор исследований по основаниям математики. М.-Л., 1936. С. 27.
- 307 Интерпретация *a* как произвольного, но фиксированного объекта не согласуется с фактическим контекстом обобщения, когда оно начинается с конкретного и всегда явно известного значения переменной *x* (например, с данного, начерченного на доске, треугольника ABC), так что обобщается именно этот единичный случай. Когда говорят о произвольных и фиксированных объектах, то имеют в виду особую интерпретацию переменных (опять-таки переменных!) как неопределённых имён (параметров). В этом случае переменная получает условную интерпретацию, и это как раз тот случай, когда конкретный объект (в рамках данного доказательства) используется как представитель определённого класса абстракции.
- 308 См.: *Новосёлов М.М.* О некоторых понятиях теории отношений // Кибернетика и современное научное познание. М., 1976. С. 260.
- 309 См.: *Новосёлов М.М.* Принадлежит ли Локку «правило Локка»? // Логические исследования. Вып. 6. М., 1999. С. 224.
- 310 *Beth E.W.* Über Lockes ..., S. 367.
- 311 Цит. по кн.: *Богомолов С.А.* Основания геометрии. М.-Пг. С. 31.
- 312 *Кант И.* Соч. Т. 3. С. 131.
- 313 *Лейбниц Г.В.* Соч. Т. 1. М., 1982. С. 205. После Лейбница эта идея встречается у Христиана Вольфа, а её критика – у Дж.Беркли и Л.Эйлера.
- 314 *Black M.* The Identity of Indiscernibles // *Mind*. 1952. v. LXI, № 242. P. 153.
- 315 *Стяжкин Н.И.* Формирование математической логики. М., 1967. С. 225.
- 316 *Лобачевский Н.И.* О началах геометрии // Об основаниях геометрии. М., 1956. С. 27.
- 317 *Фреге Г.* Смысл и денотат // Семиотика и информатика. М., 1977. Вып. 8. С. 180.
- 318 *Феферман С.* Числовые системы. Основания алгебры и анализа. М., 1971. С. 32.
- 319 *Фреге Г.* Смысл и денотат // Семиотика и информатика... С. 182.
- 320 *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики: Логические исчисления и формализация арифметики. М., 1979. С. 30.
- 321 См.: *Философская Энциклопедия*. Т. 5. М., 1970. С. 238-240; *Большая Советская Энциклопедия*. Т. 26. М., 1977. С. 31 (a translation: *Great Soviet Encyclopaedia*, ed. Macmillan, NY. – L., v. 26, 1981. P. 79-80).
- 322 Много интересных сведений об информационных возможностях глаза можно найти в кн.: *Луизов А.В.* Глаз и свет. Л., 1983.
- 323 См.: *Лейбниц Г.* Сочинения. Т. 1. М., 1982. С. 133.
- 324 См.: *Рассел Б.* Человеческое познание. Его сфера и границы. М., 1957. Гл. 1.
- 325 *Заде Л.А.* // *Кофман А.* Введение в теорию нечётких множеств. М., 1982. С. 6.
- 326 *Кассирер Э.* Теория относительности Эйнштейна. Пг., 1922. С. 13.
- 327 *Борн М.* Размышления и воспоминания физика. М., 1977. С. 163.
- 328 *Хармут Х.* Теория секвентного анализа: Основания и применения. М., 1980. С. 11.
- 329 *Лазарев Ф.В.* Проблема точности естественнонаучного знания // *Вопр. философии*. 1968. № 9.

- ³³⁰ См., например: *Новосёлов М.М.* О гносеологической точности // *Философские вопросы технического знания.* М., 1984 или: *Novosyolov M.* On epistemological preciseness: interval approach // *Science as a subject of study.* Moscow, 1987.
- ³³¹ *Компанеев А.С.* Симметрия в микро- и макромире. М., 1978.
- ³³² *Борн М.* Эйнштейновская теория относительности. М., 1972. С. 61.
- ³³³ Именно в этом пункте интервальная точка зрения (высказанная независимо) совпадает с точкой зрения идеологов синергетики: «Требование “грубости” по своей природе не связано с конечностью разрешающей способности прибора. Оно отражает не ограниченность наших возможностей производить наблюдения и измерения, а внутреннюю *структуру описываемых нами явлений*» (*Пригожин И., Стенгерс И.* Порядок из хаоса. М., 1986. С. 9. Курсив мой – М.Н.).
- ³³⁴ *Шрёдингер Э.* Что такое жизнь? М., 1972. С. 24.
- ³³⁵ См., например: *Антология мировой философии.* М., 1970. Т. 2. С. 56; или в другом переводе: *Кузанский Николай.* Соч. Т. 1. М., 1979. С. 53.
- ³³⁶ *Пригожин И., Стенгерс И.* Порядок их хаоса. М., 1986. С. 290.
- ³³⁷ Там же. С. 300.
- ³³⁸ *Мак-Витти Г.* Общая теория относительности и космология. М., 1961. С. 21.
- ³³⁹ *Вопёнка П.* Математика в альтернативной теории множеств. М., 1983. С. 82.

Resume

The author calls the philosophical attitude of his book integral. This attitude uses *interval images* of the scientific picture of the world. Additionally, apart from aiming at an explanatory role (performed by its first part), this book is meant as a step toward the new research direction that gave the book its name – *logic of abstractions*. The author's idea is that the basic concept of this research should be the concept of the logical models of abstracting processes in any field of scientific knowledge – from applied (for example, machine-oriented) to purely theoretic. The author believes that only formal models of these processes might ensure clear discriminating signs to discern (identify) abstractions of various types and various orders that are built in a program or a theory. That is why a search of logic models for abstractions and their classification is a task for every one who will endeavor to create a *general logic of abstractions*.

Оглавление

Предисловие	3
ВВЕДЕНИЕ. ФИЛОСОФИЯ И НАУКА	8
ГЛАВА 1. ИНТЕРВАЛ АБСТРАКЦИИ КАК ПРОБЛЕМА МЕТОДОЛОГИИ	17
1.1. Интервал абстракции	18
1.2. Интервальная ситуация	28
1.3. Интервальная ситуация и проблема истины	33
ГЛАВА 2. АБСТРАКЦИЯ И НАУЧНЫЙ МЕТОД	36
2.1. Странички истории	37
2.2. О значениях слова «абстракция»	43
2.3. Абстрактный объект	48
2.4. Абстракция в лабиринтах познания	52
2.5. Осмысление абстракций	58
2.6. Исключение абстракций	63
2.7. Абстракция и научный метод	70
ГЛАВА 3. АБСТРАКЦИЯ ПОСТОЯНСТВА	74
3.1. Абстракция постоянства и повседневный опыт	74
3.2. Абстракция постоянства и научный опыт	76
3.3. Абстракция постоянства и закон тождества	79
ГЛАВА 4. АБСТРАКЦИЯ ИНДИВИДУАЦИИ	81
4.1. Многое и одно	81
4.2. Проблема индивидуации	82
4.3. Немного истории	83
4.4. Индивидуация как абстракция	87
4.5. Индивидуация и универсум	91
4.6. Индивидуация и множество	92
4.7. Индивидуация и логика	94
4.8. Индивидуация и квантовая неопределённость	97
4.9. Индивидуация и парадокс Рашара	99
4.10. Индивидуация и информация	103
ГЛАВА 5. АБСТРАКЦИЯ ОТОЖДЕСТВЛЕНИЯ	105
5.1. Различение	105
5.2. Отождествление	107
5.3. Абстракция отождествления	109
5.4. Абстракция отождествления и обобщающая абстракция	112
5.5. Абстракция отождествления и факторизация	116
5.6. Принцип абстракции	119
ГЛАВА 6. ДЕДУКТИВНОЕ ОБОБЩЕНИЕ И ПРИНЦИП АБСТРАКЦИИ	122
6.1. Аподейктика в античности	123
6.2. О понятии «обобщение»	125

6.3. Платон	128
6.4. Аристотель	130
6.5. Томас Гоббс	133
6.6. Джон Локк	135
6.7. Готфрид Лейбниц	139
6.8. Джордж Беркли	141
6.9. Давид Юм	143
6.10. \forall -обобщение и принцип абстракции	145
ГЛАВА 7. АБСТРАКЦИЯ НЕРАЗЛИЧИМОСТИ	152
7.1. О тождестве неразличимых	154
7.2. Абстракция неразличимости	160
7.3. Абстракция неразличимости и метрическое равенство	163
7.4. Абстракция неразличимости и гносеологическая точность	167
7.5. Эпилог	173
Заключение	175
Примечания	176

Научное издание

НОВОСЁЛОВ Михаил Михайлович

Логика абстракций (методологический анализ). Часть первая

*Утверждено к печати Ученым советом
Института философии РАН*

В авторской редакции

Художник: *В.К.Кузнецов*

Технический редактор: *Н.Б.Ларионова*

Корректор: *Н.Н.Романова*

Лицензия ЛР № 020831 от 12.10.98 г.

Подписано в печать с оригинал-макета 19.12.2000.

Формат 60x84 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 12,00. Уч.-изд. л. 10,16. Тираж 500 экз. Заказ № 056.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН

Компьютерный набор автора

Компьютерная верстка: *Ю.А.Аношина*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН

119842, Москва, Волхонка, 14